BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 11Y65, 11A55, 11J70, 11Y40
VOL. 53 (1996) [341–350]

ALGORITHMES DES FRACTIONS CONTINUES ET DE JACOBI-PERRON

BRIGITTE ADAM AND GEORGES RHIN

We give an algorithm by which one can compute, using only rational numbers, the continued fraction and more generally the Jacobi-Perron algorithm expansion of real algebraic numbers.

1. INTRODUCTION

Dans cet article on s'intéresse à la détermination du développement en fraction continue (et plus généralement du développement par l'algorithme de Jacobi-Perron) d'un nombre (respectivement n nombres) algébrique(s) réel(s).

Le développement en fraction continue d'un nombre quadratique réel étant périodique, on s'intéressera ici aux nombres algébriques de degré supérieur à 2. Lang, Trotter [6] et Cantor, Galyean, Zimmer [4] ont donné un algorithme (utilisant les polynômes réduits) qui fournit le développement en fraction continue d'un nombre algébrique. Bombieri et van der Poorten [2] ont donné un algorithme simple qui fournit les quotients partiels de $\sqrt[3]{2}$ mais la méthode utilisée ne se généralise pas de façon évidente pour le degré supérieur à 3. On décrit dans le deuxième paragraphe un algorithme qui fournit le développement par l'algorithme de Jacobi Perron de n nombres algébriques réels et dont le calcul ne fait intervenir que des nombres entiers. Après avoir démontré la validité de cet algorithme on l'appliquera à certains nombres algébriques réels. On donnera ensuite quelques exemples numériques. Les calculs ont été effectués sur une station Sun Sparcl avec le langage Pari développé par Batut, Cohen et Olivier.

DÉFINITION 1.1: Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. Le développement par *l'algorithme de Jacobi Perron* [8] (noté *AJP*) de α est la donnée d'une suite de vecteurs $(a^\nu)_{\nu \geqslant 0}$ de $\mathbb{Z}^n$ notés $a^\nu = (a_1^\nu, a_2^\nu, \dots, a_n^\nu)$ et définis par:

$$\begin{cases} \alpha^0 = \alpha \\ \text{et pour } \nu \geqslant 0 \quad a_i^\nu = [\alpha_i^\nu] \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n \\ \text{et si } \alpha_1^\nu \neq a_1^\nu \quad \alpha_n^{\nu+1} = \dfrac{1}{\alpha_1^\nu - a_1^\nu}; \quad \alpha_i^{\nu+1} = \dfrac{\alpha_{i+1}^\nu - a_{i+1}^\nu}{\alpha_1^\nu - a_1^\nu} \text{ pour } 1 \leqslant i < n. \end{cases}$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

Received 26th June, 1995

REMARQUES. L'algorithme de Jacobi Perron est une généralisation de l'algorithme des fractions continues qui correspond à $n = 1$ dans la définition précédente. Si $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors ce développement est infini.

A un tel développement on associera la suite de matrices $\mathcal{A}_\nu$ définies par

$$\mathcal{A}_\nu = \begin{pmatrix} a_n^\nu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1}^\nu & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1^\nu & \vdots & . & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Description de l'algorithme

2.1 Définitions et notations.

DÉFINITION 2.1: On dira qu'une matrice M à coefficients réels est *positive* si elle est à termes tous strictement positifs et *positivement régulière* s'il existe un entier $k > 0$ tel que M^k soit positive.

Soit n un entier $(n \geqslant 1)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, n entiers algébriques réels (strictement positifs) tels que $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. On note $K = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, d le degré de K sur $\mathbb{Q}$ et $m = d - 1$. On complète $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ par $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m$ tel que $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ soit une base de K sur $\mathbb{Q}$. On choisit un élément non nul ω de K tel que:

(1) $\omega > \max_{2 \leqslant j \leqslant d} |\omega_j|$ où les ω_j sont les conjugués de ω dans $\mathbb{C}$;

(2) la transposée de la matrice de la multiplication par ω exprimée dans la base $\{\alpha_m, \dots, \alpha_1, 1\}$, notée M, soit une matrice à coefficients entiers positivement régulière.

NOTATION. Les matrices seront, par la suite, notées de la façon suivante:

$$M = (a_{ij})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant m}} = \begin{pmatrix} a_{m,m} & . & . & . & a_{m,0} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{0,m} & . & . & . & a_{0,0} \end{pmatrix}.$$

$M(n)$ désignera la matrice extraite de M en supprimant les lignes de numéro m à $(n+1)$.

ALGORITHME 2.2. On donne un algorithme qui fournit le développement par l'AJP de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jusqu'à l'ordre p donné. Soit k_0 un entier tel que M^{k_0} soit à termes tous strictement positifs.

(1) $k = 0$, $M_k = M^{k_0}(n)$. On note $M_k = (a_{ij})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant m}}$.

(2) Si M_k vérifie la condition (C1) suivante:

(C1) Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, les quotients de la division de a_{ij} par a_{0j} dans $\mathbb{Z}$ sont tous égaux pour $0 \leqslant j \leqslant m$,

alors on pose $b_i = [(a_{ij})/(a_{0j})]$ et

$$A = \begin{pmatrix} b_n & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_1 & \vdots & . & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si M_k ne vérifie pas la condition (C1) on passe à l'étape (4).

(3) On pose $H = A^{-1} M_k = (h_{ij})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant m}}$. On peut remarquer que H est à coefficients positifs ou nuls. Si H vérifie la condition (C2) suivante:

(C2) Pour $0 \leqslant j \leqslant m$, $h_{0j} > 0$,

alors on a $A = \mathcal{A}_k$ (où $\mathcal{A}_k$ désigne la k-ième matrice de l'algorithme de Jacobi-Perron définie dans le paragraphe précédent) et on pose $M_{k+1} = H$, $k = k + 1$. Si $k < p$ on passe à l'étape (2), sinon on s'arrête. Si H ne vérifie pas la condition (C2) on passe à l'étape (4).

(4) $M_k = M_k M$. On réitère cette opération jusqu'à ce que M_k soit à termes tous strictement positifs. On passe à l'étape (2).

3. Preuve de l'algorithme

On montre que l'algorithme précédent fournit le développement par l'AJP de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, c'est-à-dire qu'à chaque étape on a $A = \mathcal{A}_k$. Pour cette démonstration on utilise le théorème de Frobenius [5]:

THÉORÈME 3.1. *Soit A une matrice carrée à coefficients réels d'ordre n positivement régulière alors:*

(a) *A admet un vecteur propre x^0 à termes tous strictement positifs tel que $Ax^0 = \lambda_0 x^0$.*

(b) *Si $\lambda \neq \lambda_0$ est une autre valeur propre de A alors $|\lambda| < \lambda_0$.*

(c) *Il existe un n-uple f^0 à termes tous strictement positifs tel que ${}^t f^0 A = \lambda_0 \, {}^t f^0$ et tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 f_i^0 = 1$.*

(d) *En posant* $P = \left(x_i^0 f_j^0\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}}$, *on a* $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_0^k} A^k = P$.

(1) Premièrement on montre qu'il est toujours possible de construire une matrice M_k vérifiant la condition (C1) et telle que $H = A^{-1}M_k$ vérifie la condition (C2).

M étant positivement régulière, on peut utiliser le théorème de Frobenius par lequel on a:

(i) ω est la seule valeur propre de M de plus grand module dont le vecteur propre associé est:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(ii) $\lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{\omega^l} M^l = P$ avec $P = (\alpha_i \lambda_j)_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ 0\leqslant j\leqslant m}}$ (en notant $\alpha_0 = 1$) où $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_m \\ \vdots \\ \lambda_1 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$ est à termes tous strictement positifs.

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l_0 > 0$ tel que si $l > l_0$, alors, en notant $M^l = (a_{ij})_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ 0\leqslant j\leqslant m}}$, $|(a_{ij}/a_{0j}) - (\alpha_i\lambda_j)/(\alpha_0\lambda_j)| < \varepsilon$. Or $\alpha_i \neq [\alpha_i]$, donc pour tout l assez grand on aura $[a_{ij}/a_{0j}] = [\alpha_i]$. C'est-à-dire que pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$, les quotients de a_{ij} par a_{0j}, notés b_{ij}, sont tous égaux pour $0 \leqslant j \leqslant m$. On a de plus

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\omega^l} A^{-1} M^l(n) = A^{-1}P(n) = \begin{pmatrix} \lambda_m & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_0 \\ (\alpha_n - b_n)\lambda_m & \cdot & \cdot & \cdot & (\alpha_n - b_n)\lambda_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_1 - b_1)\lambda_m & \cdot & \cdot & \cdot & (\alpha_1 - b_1)\lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout l assez grand la matrice H définie dans (3) par $H = A^{-1}M^l(n)$ vérifie la condition (C2), à savoir $h_{0j} > 0$, pour $0 \leqslant j \leqslant m$.

(2) On montre à présent que si les b_i sont définis par (2) alors $b_i = [\alpha_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

On a

$$H = \begin{pmatrix} a_{0,m} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{0,0} \\ a_{n,m} - a_{0,m}b_n & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,0} - a_{0,0}b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,m} - a_{0,m}b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,0} - a_{0,0}b_1 \end{pmatrix}.$$

ω étant la valeur propre de M associée au vecteur propre Ω, il existe un entier $l > 0$ tel que $M_k\Omega = \omega^l\Omega(n)$, c'est-à-dire:

$$\begin{pmatrix} a_{n,m} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0,m} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{0,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega^l \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

d'où (pour $0 \leqslant i \leqslant n$)

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\alpha_j}{\sum_{j=0}^{m} a_{0j}\alpha_j},$$

c'est-à-dire,

$$\alpha_i = b_i + \frac{\sum_{j=0}^{m} (a_{ij} - a_{0j}b_i)\alpha_j}{\sum_{j=0}^{m} a_{0j}\alpha_j};$$

$b_i = [a_{ij}/a_{0j}]$ entraîne que $0 < \left(\sum_{j=0}^{m} (a_{ij} - a_{0j}b_i)\alpha_j\right) \Big/ \left(\sum_{j=0}^{m} a_{0j}\alpha_j\right) < 1$, c'est-à-dire, $b_i = [\alpha_i]$ (pour $0 \leqslant i \leqslant n$). Ainsi on a montré que $A = \mathcal{A}_0$.

(3) Montrons par récurrence que l'algorithme fournit le développement par l'AJP de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jusqu'au rang p.

Soit (H_k) l'hypothèse: jusqu'au rang k on a $A = \mathcal{A}_k$. Précédemment on a montré (H_0), supposons donc (H_k) et montrons (H_{k+1}). On a $\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\omega^l}\mathcal{A}_k^{-1} \dots \mathcal{A}_0^{-1} M^l(n) = \mathcal{A}_k^{-1} \dots \mathcal{A}_0^{-1} P(n)$ et

$$\text{(E)} \qquad \mathcal{A}_k^{-1} \dots \mathcal{A}_0^{-1} P(n) = \left(1/\alpha_n^{k+1}\right) \dots 1/\alpha_n^1 \left(\alpha_i^{k+1}\lambda_j\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant m}}$$

où α_i^{k+1} sont les réels définis par le développement par l'AJP de $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. En effet,

$$\mathcal{A}_0^{-1}P(n)=\begin{pmatrix}0&\dots&\dots&0&1\\ 1&\ddots&.&\vdots&-a_n^0\\ 0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\ 0&\dots&0&1&-a_1^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_n\lambda_m&.&.&.&\alpha_n\lambda_0\\ .&.&.&.&.\\ .&.&.&.&.\\ .&.&.&.&.\\ \lambda_m&.&.&.&\lambda_0\end{pmatrix};$$

d'où

$$\mathcal{A}_0^{-1}P(n)=\begin{pmatrix}\lambda_m&.&.&.&\lambda_0\\ (\alpha_n-a_n^0)\lambda_m&.&.&.&(\alpha_n-a_n^0)\lambda_0\\ .&.&.&.&.\\ .&.&.&.&.\\ (\alpha_1-a_1^0)\lambda_m&.&.&.&(\alpha_1-a_1^0)\lambda_0\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha_n^1}\left(\alpha_i^1\lambda_j\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant m}}$$

et par récurrence on obtient la formule (E). En remplaçant dans les démonstrations précédentes $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ par $(\alpha_1^{k+1},\dots,\alpha_n^{k+1})$ on obtient $b_i=[\alpha_i^{k+1}]$ soit $A=\mathcal{A}_{k+1}$ ce qui termine la démonstration.

4. Application à certains nombres algébriques

4.1 Développement des racines r-ièmes. Soient r et n des entiers tels que $r\geqslant 2$ et $1\leqslant n\leqslant r-1$. Soient $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\left(\sqrt[r]{d},\sqrt[r]{d^2},\dots,\sqrt[r]{d^n}\right)$ où d est un entier différent d'une puissance r-ième. On pose $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt[r]{d}\right)$, une base de K sur $\mathbb{Q}$ est $\mathcal{B}=\left\{\sqrt[r]{d^{r-1}},\dots,\sqrt[r]{d},1\right\}$. On choisit $\omega=1+\sqrt[r]{d}+\dots+\sqrt[r]{d^{r-1}}$. On peut vérifier que la transposée de la matrice de la multiplication par ω exprimée dans la base $\mathcal{B}$ est positive, donc on peut utiliser l'algorithme décrit précédemment pour donner le développement par l'AJP de $\left(\sqrt[r]{d},\sqrt[r]{d^2},\dots,\sqrt[r]{d^n}\right)$.

4.2 Autres nombres algébriques. Soit $f(X)=a_rX^r-\left(a_{r-1}X^{r-1}+\dots+a_0\right)$ un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $a_ra_0>0$, $a_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant r-1)$ et tel qu'il existe deux entiers k_1 et k_2 premiers entre eux tels que $a_{k_1}a_{k_2}>0$ (on dira que f est *positivement réduit*). Soit α la seule racine réelle positive de f (l'unicité de cette racine est donnée par la règle de Descartes [7]). On pose $K=\mathbb{Q}(\alpha)$, une base de K sur $\mathbb{Q}$ est $\{\alpha^{r-1},\dots,\alpha,1\}$. On choisit $\omega=a_r\alpha$. La transposée de la matrice de la multiplication par ω exprimée dans la base $\{\alpha^{r-1},\dots,\alpha,1\}$ est

$$M=\begin{pmatrix} a_{r-1} & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ a_r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que M est positivement régulière, on utilise la proposition [**3**] suivante:

Proposition 4.1. *Soit $A=(a_{ij})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice carrée d'ordre n à termes réels positifs ou nuls. Soit $G(A)$ le graphe orienté associé à A de la façon suivante:*

- *les sommets de $G(A)$ sont $1,2,\dots,n$.*
- *$G(A)$ possède un arc de i vers j si $a_{ij}\neq 0$.*

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:

(i) *A est positivement régulière.*

(ii) *$G(A)$ est un graphe fortement connexe (c'est-à-dire, pour tout couple (x,y) de sommets il existe un chemin de x à y et un chemin de y à x) tel que le PGCD des longueurs des circuits (chemin $(x_1,\dots,x_q)$ tel que $x_1=x_q$) de $G(A)$ soit égal à 1.*

$a_ra_0>0$ entraîne que $G(M)$ est fortement connexe et f positivement réduit entraîne que le PGCD des longueurs des circuits est égal à 1 (en effet, il existe deux circuits de longueur respective k_1 et k_2). M étant à termes tous positifs ou nuls, la Proposition 4.1 implique donc que M est positivement régulière. D'après le théorème de Frobenius, ω est la valeur propre de M de plus grand module. On peut donc utiliser l'algorithme précédent pour donner le développement par l'algorithme de Jacobi-Perron de $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\left(\alpha,\alpha^2,\dots,\alpha^n\right)$ où $n\leqslant r-1$.

Remarque 4.2. Si $f(X)=a_rX^r-\left(a_{r-1}X^{r-1}+\dots+a_0\right)$ avec $a_ra_0>0$, $a_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i<r-1)$, $a_{r-1}<0$ est tel qu'il existe deux entiers k_1 et k_2 premiers entre eux tels que $a_{k_1}a_{k_2}>0$ (on dira que f est "presque positivement réduit") alors en remplaçant ω par $a_r\alpha+|a_{r-1}|$ on aura

$$M=\begin{pmatrix} a_{r-1}+|a_{r-1}| & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ a_r & |a_{r-1}| & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & |a_{r-1}| & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_r & |a_{r-1}| \end{pmatrix}$$

qui est positivement régulière.

5. Le cas des fractions continues

On étudie dans ce paragraphe comment appliquer l'algorithme dans le cas des fractions continues à un nombre algébrique α. Soit α une racine réelle d'un polynôme irréductible P de degré $r \geqslant 2$ de $\mathbb{Z}[X]$. Soit $[c_0, c_1, \dots, c_h, \dots]$ le développement en fraction continue de α. On peut construire une suite de polynômes P_h de $\mathbb{Z}[X]$ par:

$$\begin{cases} P_0 = P, \\ P_{h+1}(X) = -X^r P_h\left(c_h + \dfrac{1}{X}\right). \end{cases}$$

D'après Zassenhaus [9] les polynômes P_h admettent α_h, quotients complets de α, pour racine et pour h suffisamment grand, Akritas [1] a montré que ce résultat peut être rendu effectif, les autres racines, notées β_h, vérifient $|\beta_h| < 1$ et $-1 < \mathrm{Re}\,(\beta_h) < 0$, où $\mathrm{Re}\,(\beta_h)$ désigne la partie réelle de β_h. On dit que P_h (ou α_h) est réduit.

Pour développer α en fraction continue, on construit la suite des polynômes P_h (en utilisant, par exemple, l'algorithme de Cantor, Galyean et Zimmer [4]) et si P_h est positivement réduit ou presque positivement réduit on peut alors utiliser l'algorithme précédent pour développer α_h. Nous donnons dans la proposition suivante une condition suffisante pour que P_h vérifie cette propriété.

Proposition 5.1.

(i) *Si $r = 2$, alors P_h réduit équivaut à P_h positivement réduit.*

(ii) *Si $r \geqslant 3$, alors P_h réduit et $c_h \geqslant r-1$ impliquent que P_{h+1} est positivement réduit.*

Preuve: (i) étant évident, montrons (ii). En notant

$$P_h(X) = a_r X^r - \left(a_{r-1}X^{r-1} + \dots + a_0\right) = a_r(X - \alpha_h)\sum_{j=0}^{r-1} s_j X^{r-j-1},$$

on a, pour $0 \leqslant j \leqslant r-1$, $s_j > 0$ et $a_{r-j}/a_r = \alpha_h s_{j-1} - s_j$; en posant

$$P_{h+1}(X) = A_r X^r - \left(A_{r-1}X^{r-1} + \dots + A_0\right),$$

on a d'après la formule de Taylor,

$$P_{h+1}(X) = -X^r P_h(c_h) + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(r-k)}(c_h)}{(r-k)!} X^k;$$

donc, pour $0 \leqslant k < r$

$$A_k = \binom{r}{k} a_r c_h^k - \sum_{l=1}^{k} \binom{r-l}{k-l} a_{r-l} c_h^{k-l},$$

d'où (pour $0 \leqslant k < r$, $1 \leqslant l \leqslant k$)

$$\frac{A_k}{a_r} = \sum_{l=0}^{k-1} s_l \left\{ \binom{r-l}{k-l} c_h^{k-l} - \binom{r-l-1}{k-l-1} c_h^{k-l-1} \alpha \right\} + s_k.$$

Posons

$$A = \binom{r-l}{k-l} c_h^{k-l} - \binom{r-l-1}{k-l-1} c_h^{k-l-1} \alpha;$$

$c_h \leqslant \alpha < c_h + 1$ implique que

$$A > c_h^{k-l-1} \left\{ c_h \binom{r-l-1}{k-l} - \binom{r-l-1}{k-l-1} \right\},$$

c'est-à-dire, $A > c_h^{k-l-1}((r-l-1)!)/((k-l)!(r-k-1)!)(c_h - (k-l)/(r-k))$ et $c_h \geqslant r-1$ implique que $c_h - (k-l)/(r-k) \geqslant 0$, c'est-à-dire, $A > 0$. Or pour $0 \leqslant l \leqslant k$, on a $s_l > 0$, donc pour $0 \leqslant k < r$, on a $A_k > 0$. Or $A_r = -P_h(c_h) > 0$, donc P_{h+1} est positivement réduit. $\square$

REMARQUE 5.2. (a) Si $r = 3$, alors P_h réduit et $c_h \geqslant 1$ impliquent que P_h ou P_{h+1} ou P_{h+2} positivement réduits.

(b) Si $r > 3$, alors P_h réduit et $c_h \geqslant r-2$ impliquent que P_{h+1} est presque positivement réduit. Dans ce cas on ne peut pas espérer remplacer la borne $(r-1)$ par 1, en effet on peut considérer le contre-exemple suivant: $P_h(X) = 8X^4 + 2X^3 - 14X^2 - 13X - 3$. On a P_h réduit et $c_h = [\alpha_h] = 1$, or P_{h+1} n'est pas positivement réduit.

6. EXEMPLES NUMÉRIQUES

6.1 DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE. On développe $\sqrt[3]{2}$ en fraction continue à l'ordre 1000. On choisit $\omega = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et on utilise l'algorithme précédent avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que les calculs sont nettement plus rapides (6 ms) et la taille des entiers nécessaires au calcul (environ 170 chiffres) plus petite qu'en utilisant les formules données par Bombieri et Van der Poorten (6mn et 507 chiffres).

6.2 DÉVELOPPEMENT PAR L'ALGORITHME DE JACOBI-PERRON. On développe $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{16})$ par l'algorithme de Jacobi-Perron à l'ordre 2000.

On choisit $\omega = 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}$ et on utilise l'algorithme précédent avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que les plus grands entiers intervenant dans le développement sont $(1920, 2002)$ à l'ordre 1799. Les plus grands entiers nécessaires au calcul ont environ 990 chiffres.

On peut remarquer que, pour cet exemple, en remplaçant dans l'algorithme M par $(1/9)M^3$ (matrice de déterminant 1) on diminue considérablement la taille (81 chiffres) des entiers nécessaires au calcul (par contre le temps est environ le même).

6.3 Développement en fraction continue de α où α est une racine de $P(X) = X^7 - 7X + 3$. P admet 3 racines réelles. Notons α l'une d'entre elles. En construisant la suite des polynômes P_h définies dans le paragraphe précédent on constate que P_4 est positivement réduit. On note $P_4 = \sum_{i=0}^{7} a_i X^i$ et α_4 la racine réelle de P_4. On considère $\omega = a_7 \alpha_4$ et l'algorithme précédent nous fournit le développement en fraction continue de α_4 soit celui de α (quel que soit α, racine réelle de P).

Bibliographie

[1] A.G. Akritas, *Elements of computer algebra with applications* (Wiley Interscience, New York, 1989).

[2] E. Bombieri et A.J. van der Poorten, 'Continued fractions of algebraic numbers', in *Computational algebra and number theory, Sydney 1992*, (Wieb Bosma and Alf Van Der Poorten, Editors) (Kluwer Academic Publishing, 1995), pp. 138–154.

[3] R. Brualdi, *Combinatorial matrix theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

[4] G. Cantor, P. Galyean and G. Zimmer, 'A continued fraction algorithm for real algebraic numbers', *Math. Comp.* **26** (1972), 785–791.

[5] S. Karlin, *Initiation aux processus aléatoires* (Dunod.).

[6] S. Lang et A. Trotter, 'Continued fractions for some algebraic numbers', *J. für Math.* **255** (1972), 112–134.

[7] M. Mignotte, 'Mathématiques pour le calcul formel', *PUF*, p. 208.

[8] O. Perron, 'Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus', *Math. Ann.* **64** (1907), 1–76.

[9] H. Zassenhaus, *On the continued fraction development of real irrational algebraic numbers*, (unpublished) (Ohio State University, Columbus, Oh., 1968).

URA CNRS 399, Département de Mathématiques et Informatique
UFR MIM, Université de Metz,Ile du Saulcy
57045 Metz Cedex 01
France.