



COMPOSITIO MATHEMATICA

Extensions de représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques

Gabriel Dospinescu

Compositio Math. **151** (2015), 1462–1498.

[doi:10.1112/S0010437X14007921](https://doi.org/10.1112/S0010437X14007921)



FOUNDATION
COMPOSITIO
MATHEMATICA



LONDON
MATHEMATICAL
SOCIETY
150 YEARS



Extensions de représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques

Gabriel Dospinescu

ABSTRACT

Let Π be an irreducible unitary completion of a locally algebraic $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -representation. We describe those first-order deformations of Π which are themselves completions of a locally algebraic representation. This answers a question of Paškūnas and has direct applications to the Breuil–Mézard conjecture.

RÉSUMÉ

Soit Π une complétion unitaire irréductible d'une représentation localement algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On décrit les déformations infinitésimales Π_1 de Π qui sont elles-mêmes complétions d'une représentation localement algébrique. Cela répond à une question de Paškūnas et a des applications directes à la conjecture de Breuil–Mézard.

Table des matières

1	Introduction	1462
2	Rappels et compléments	1467
3	Extensions de Hodge–Tate	1471
4	Vecteurs P-finis	1474
5	Le théorème de dualité de Colmez	1480
6	Etude du module $\tilde{E}_{\mathrm{dif},n}^+$	1485
7	Preuve des résultats principaux	1489
	Remerciements	1497
	References	1497

1. Introduction

1.1 Le résultat principal

Soit p un nombre premier, L une extension finie de \mathbf{Q}_p , O_L l'anneau de ses entiers et soit $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow O_L^*$ un caractère unitaire. On note $\mathrm{Rep}_L(\delta)$ la catégorie des représentations de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur des L -espaces de Banach Π , telles que :

- Π a pour caractère central δ ;
- Π est unitaire, i.e. il existe une valuation v_Π qui définit la topologie de Π et qui est G -invariante ;
- si Π_0 est la boule unité de Π pour la valuation v_Π , alors $\Pi_0/p\Pi_0$ est un $O_L[G]$ -module de longueur finie.

Received 10 April 2013, accepted in final form 1 September 2014, published online 3 March 2015.

2010 Mathematics Subject Classification 11FXX, 11SXX, 14GXX, 22EXX (primary).

Keywords: (φ, Γ) -module, Fontaine theory, p -adic local Langlands correspondence, admissible Banach space representation.

This journal is © Foundation Compositio Mathematica 2015.

On peut démontrer [CDP14a, Corollary 1.6] que $\text{Rep}_L(\delta)$ est la catégorie des L -représentations de Banach unitaires, admissibles (au sens de Schneider et Teitelbaum [ST02]), à caractère central δ et qui sont topologiquement de longueur finie. Un objet Π de $\text{Rep}_L(\delta)$ est dit *supersingulier* si Π est absolument irréductible¹ et si Π n'est pas isomorphe à un sous-quotient de l'induite parabolique d'un caractère unitaire du tore diagonal de G .

Si $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$, on note Π^{alg} l'espace des vecteurs localement algébriques de Π . Ce sont les vecteurs v dont l'application orbite $g \rightarrow g \cdot v$ est localement polynomiale sur G . L'espace Π^{alg} est la plupart du temps nul² et on a $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$ si et seulement si Π contient une représentation de la forme $W \otimes \pi$, avec W une représentation algébrique de G et π une représentation lisse, admissible (bien entendu, avec $W \neq 0$ et $\pi \neq 0$). Les représentations Π telles que $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$ jouent un rôle très important à travers les connexions qu'elles ont avec la théorie des représentations galoisiennes : leur étude est un ingrédient clé dans la preuve des conjectures de Fontaine–Mazur [Kis09, Eme(a)] et de Breuil et Mézard [Kis09, BM14, Paš12]. Leur étude a été initiée par Breuil [Bre04], ce qui a abouti [Col10b, Paš13] à la correspondance de Langlands locale p -adique pour G .

Colmez a défini [Col10b, ch. IV] un foncteur exact contravariant $\Pi \rightarrow D(\Pi)$ de $\text{Rep}_L(\delta)$ dans la catégorie $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ des (φ, Γ) -modules étales sur un corps de séries de Laurent \mathcal{E} . D'après Fontaine [Fon90], la catégorie $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ est équivalente à la catégorie $\text{Rep}_L(G_{\mathbf{Q}_p})$ des L -représentations continues de dimension finie de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, d'où un foncteur (contravariant et exact) $\Pi \rightarrow V(\Pi)$ de $\text{Rep}_L(\delta)$ dans $\text{Rep}_L(G_{\mathbf{Q}_p})$. On suppose dans la suite de l'introduction que $p \geq 5$. Soit $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ un objet supersingulier. On dispose alors de deux résultats suivants, qui ont fait couler beaucoup d'encre :

- $V(\Pi)$ est absolument irréductible, de dimension 2, et de déterminant $\zeta = \chi\delta$, où $\chi : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique ;
- $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$ si et seulement si $V(\Pi)$ est de de Rham, à poids de Hodge–Tate distincts.

Le premier résultat est dû à Paškūnas [Paš13, Theorem 11.4] pour $p \geq 5$ et démontré dans [CDP14a] en général, et le second suit du premier et d'un théorème de Colmez [Col10b, théorèmes VI.6.13, VI.6.18]. Le but de cet article est de montrer le résultat suivant, qui répond à une question de Paškūnas et peut être vu comme une version du théorème de Colmez pour les déformations infinitésimales de Π .

THÉORÈME 1.1. *Soit $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ un objet supersingulier, tel que $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$. On considère une suite exacte non scindée $0 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow 0$ dans $\text{Rep}_L(\delta)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- Π_1^{alg} est dense dans Π_1 ;
- $\Pi_1^{\text{alg}} \neq \Pi^{\text{alg}}$;
- $V(\Pi_1)$ est de de Rham.

Remarque 1.2. Si Π est irréductible et si $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$, alors Π^{alg} est dense dans Π (puisque Π^{alg} est stable par G), donc Π est une complétion unitaire de Π^{alg} . Si Π est réductible et si $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$, il n'y a aucune raison pour que Π^{alg} soit dense dans Π . L'exemple suivant est assez éclairant : soient δ_1, δ_2 des caractères unitaires tels que $\delta_1\delta_2 = \chi\delta$, où $\chi : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique. On suppose que $\delta_1\delta_2^{-1} \neq 1, \chi^{\pm 1}$ et on considère les induites paraboliques continues³

¹ Cela signifie que $\Pi \otimes_L L'$ est topologiquement irréductible pour toute extension finie L' de L .

² Si $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$, alors δ est localement algébrique, mais cela est loin d'être suffisant.

³ Si $\delta_1 \otimes \delta_2$ est un caractère unitaire du tore diagonal de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on note $\text{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)^{\text{cont}}$ l'espace des fonctions continues $f : \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \rightarrow L$ telles que $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \delta_1(a)\delta_2(d)f(g)$ pour $a, d \in \mathbf{Q}_p^*, b \in \mathbf{Q}_p$ et $g \in \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. C'est naturellement un objet de $\text{Rep}_L(\delta_1\delta_2)$.

$\Pi_1 = \text{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2 \chi^{-1})^{\text{cont}}$ et $\Pi_2 = \text{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \delta_1 \chi^{-1})^{\text{cont}}$. Alors $\Pi_1, \Pi_2 \in \text{Rep}_L(\delta)$ sont des objets absolument irréductibles non isomorphes (mais pas supersinguliers non plus) et il existe⁴ une extension nontriviale $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$ dans $\text{Rep}_L(\delta)$. On montre [Paš13, Lemma 11.5] que si $\Pi_1^{\text{alg}} \neq 0$, alors $\Pi_2^{\text{alg}} = 0$, donc $\Pi^{\text{alg}} = \Pi_1^{\text{alg}}$ n'est pas dense dans Π_1 . Mais on a bien $\Pi_1^{\text{alg}} \neq 0$ si et seulement si $V(\Pi)$ est de de Rham.

1.2 Lien avec la conjecture de Breuil–Mézard et généralisation d'un résultat de Colmez

On suppose⁵ dans cette section que $p \geq 5$. Nous allons expliquer pourquoi le théorème 1.1 finit la preuve de [Paš12, Theorem 4.18], qui est un des ingrédients techniques majeurs de la preuve locale de Paškūnas de la conjecture de Breuil et Mézard [BM02].

Soit $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ un objet supersingulier (on ne suppose pas pour l'instant que $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$) et notons⁶ $\text{Rep}_L(\delta)_\Pi$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_L(\delta)$ formée des objets dont tous les facteurs de Jordan–Hölder sont isomorphes à Π . Soit R^ζ l'anneau de déformation universel de $V(\Pi)$ avec déterminant ζ (on a un isomorphisme $R^\zeta \simeq O_L[[T_1, T_2, T_3]]$). Paškūnas montre [Paš13, Theorem 1.4, Corollary 4.48] que le foncteur de Colmez induit une anti-équivalence entre $\text{Rep}_L(\delta)_\Pi$ et la catégorie des R^ζ -modules de longueur finie, et cette anti-équivalence est compatible avec Ext^i . En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}^1(\Pi, \Pi) \simeq \text{Hom}(R^\zeta, L[\varepsilon]),$$

et le terme de droite est de dimension 3 sur L (le premier Ext^1 est calculé dans $\text{Rep}_L(\delta)$). Autrement dit, l'espace $\text{Ext}^1(\Pi, \Pi)$ des déformations infinitésimales de Π dans $\text{Rep}_L(\delta)$ est isomorphe à l'espace $\text{Ext}_\zeta^1(V(\Pi), V(\Pi))$ des déformations infinitésimales de $V(\Pi)$, de déterminant ζ en tant que $L[\varepsilon]$ -module.

Un rôle important dans les travaux de Paškūnas [Paš12] est joué par les déformations Π_1 de Π telles que la suite $0 \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_1^{\text{alg}} \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow 0$ soit exacte. Le point fondamental est que la dimension de cet espace est ≤ 1 quand Π^{alg} est irréductible, ce qui lui permet d'interpréter les anneaux de déformations potentiellement semi-stables purement en termes de représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Paškūnas montre dans [Paš12, Theorems 4.18, 6.1] ce résultat quand $V(\Pi)$ est trianguline, autrement dit, quand Π fait partie de la série principale p -adique. Sa preuve, qui repose sur une description explicite des vecteurs localement analytiques Π^{an} de Π (due à Liu, Xie, Zhang [LXZ12] et Colmez [Col11] et conjecturée par Berger, Breuil [BB10] et Emerton [Eme06]), ainsi que sur les travaux de Berger–Breuil [BB10], ne s'adapte pas au cas où $V(\Pi)$ n'est plus trianguline. Nous allons voir que cela découle du théorème 1.1 dans tous les cas (si Π^{alg} est irréductible).

Il est clair que si la suite $0 \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_1^{\text{alg}} \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow 0$ est exacte, alors Π_1^{alg} est dense dans Π_1 , et la réciproque est vraie si en plus Π^{alg} est irréductible. Considérons donc le sous-espace $\text{Ext}_{\text{alg}}^1(\Pi, \Pi)$ de $\text{Ext}^1(\Pi, \Pi)$ engendré par les extensions $0 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow 0$ pour lesquelles Π_1^{alg} est dense dans Π_1 . Il s'agit donc de l'espace des déformations infinitésimales de Π qui sont complétions unitaires de leurs vecteurs localement algébriques. On note $\text{Ext}_{g, \zeta}^1(V(\Pi), V(\Pi))$ le sous-espace de $\text{Ext}_\zeta^1(V(\Pi), V(\Pi))$ correspondant aux déformations de $V(\Pi)$ qui sont de de Rham. La discussion ci-dessus permet de reformuler le théorème 1.1 comme suit.

⁴ Ce genre d'extension n'existerait pas si on travaillait avec des coefficients l -adiques, où $l \neq p$ est un nombre premier.

⁵ Cette hypothèse n'est utilisée que pour le calcul de l'espace des déformations infinitésimales d'un objet supersingulier de $\text{Rep}_L(\delta)$, qui n'est pas disponible pour $p \leq 3$.

⁶ Cette catégorie est notée $\text{Ban}_{G, \zeta}^{\text{adm. fl}}(L)_\Pi$ dans [Paš13].

THÉORÈME 1.3. Soit $p \geq 5$ et soit $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ un objet supersingulier tel que $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$. Alors on a un isomorphisme canonique, induit par le foncteur de Colmez

$$\text{Ext}_{\text{alg}}^1(\Pi, \Pi) \simeq \text{Ext}_{g, \zeta}^1(V(\Pi), V(\Pi)).$$

Il nous reste donc à calculer la dimension de l'espace $\text{Ext}_{g, \zeta}^1(V(\Pi), V(\Pi))$, ce qui se fait sans mal en utilisant la théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham. Le calcul offre quelques surprises. Avant d'énoncer le résultat, il nous faut une définition. On dit qu'une représentation V absolument irréductible, de dimension 2 est *spéciale* si elle est potentiellement cristalline, à poids de Hodge–Tate distincts et si la représentation de Weil–Deligne associée au module de Fontaine $D_{\text{pst}}(V)$ est la somme directe de deux caractères, dont le quotient est $|x|$ ou $|x|^{-1}$. Une telle représentation est donc trianguline, car elle devient cristalline sur une extension abélienne de \mathbf{Q}_p . Ces représentations peuvent donc être entièrement comprises en termes des modules filtrés associés par la théorie de Fontaine.

PROPOSITION 1.4. Soit ζ un caractère unitaire et soit V une L -représentation absolument irréductible, de de Rham, à poids de Hodge–Tate distincts et telle que $\det V = \zeta$. Alors $\dim_L \text{Ext}_{g, \zeta}^1(V, V) = 1$ sauf si V est spéciale, auquel cas $\dim_L \text{Ext}_{g, \zeta}^1(V, V) = 2$.

Enfin, nous disposons du résultat suivant de Colmez [Col11, théorème 4.12], qui, combiné au théorème 1.1 et à la proposition 1.5 permet de finir la preuve de [Paš12, Theorem 4.18] dans les cas restants (i.e. quand la partie lisse de Π^{alg} est supercuspidale).

PROPOSITION 1.5. Π^{alg} est réductible si et seulement si $V(\Pi)$ est spéciale. Dans ce cas, Π^{alg} vit dans une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow W \otimes_L \text{St} \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow W \rightarrow 0$$

pour une certaine représentation algébrique W , St étant la représentation de Steinberg (lisse).

Remarque 1.6. (a) Supposons que Π^{alg} est réductible, donc $V(\Pi)$ est spéciale. Soit Π_1 une déformation de Π^{alg} telle que Π_1^{alg} soit dense dans Π_1 . Une question naturelle (que je dois à Paškūnas) est de savoir si dans ce cas la suite $0 \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_1^{\text{alg}} \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow 0$ est exacte. Dans [Dos12b] nous ‘montrons’ que la réponse est affirmative, sauf que... la preuve n'est pas correcte. D'ailleurs, il est probable que la réponse est négative, pour la raison suivante. La proposition 1.5 fournit deux classes de déformations de de Rham de $V(\Pi)$: une potentiellement cristalline et l'autre potentiellement semi-stable mais non cristalline. Il est probable que le théorème VI.6.30 de Colmez [Col10b], reliant le module de Jacquet de la partie lisse de Π^{alg} au module de Fontaine $D_{\text{pst}}(V(\Pi))$, admet une version pour les déformations infinitésimales. Si c'était le cas, cela montrerait que la suite $0 \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_1^{\text{alg}} \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow 0$ est exacte si et seulement si $V(\Pi_1)$ est la déformation potentiellement cristalline de $V(\Pi)$. On obtiendrait ainsi une suite exacte $0 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow 0$, avec Π supersingulière, Π_1^{alg} dense dans Π_1 , mais telle que la suite $0 \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_1^{\text{alg}} \rightarrow \Pi^{\text{alg}} \rightarrow 0$ ne soit pas exacte. Nous espérons revenir sur ce point dans un futur article.

(b) Paškūnas sait déduire du théorème 1.1, de ses résultats de [Paš12] et de sa ‘décomposition de Bernstein’ [Paš13, Theorem 1.4], la généralisation suivante du théorème de Colmez [Col10b, théorème 0.20] et d'une partie du théorème 1.1 : si $p \geq 5$ et si $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ est une complétion de ses vecteurs localement algébriques, alors $V(\Pi)$ est de de Rham. La remarque 1.2 montre que la réciproque de cet énoncé est fautive. Les techniques de cet article permettent de montrer que cette réciproque est vraie quand les facteurs de Jordan–Hölder de Π sont tous supersinguliers.

1.3 Ingrédients de la preuve

Nous terminons cette introduction en expliquant les étapes de la preuve du théorème 1.1, qui utilise de manière intensive la théorie des (φ, Γ) -modules et les techniques introduites par Colmez pour l'étude de la correspondance de Langlands locale p -adique pour $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ [Col10b]. En principe, nous suivons les lignes de la démonstration alternative [Dos12a] du théorème de Colmez [Col10b, théorème 0.20]. Cela demande d'étendre/adapter bon nombre de résultats de [Dos12a] et [Col10b]. Nous reposons aussi de manière essentielle sur [CD14], qui généralise (souvent avec des preuves différentes) la plupart des résultats de [Col10b] à la catégorie $\text{Rep}_L(\delta)$ (et non seulement aux objets irréductibles). Dans cet article on étend (avec une preuve différente) une loi de réciprocité explicite de Colmez et on raffine sa théorie du modèle de Kirillov de Π^{alg} , ainsi que le résultat principal de [Dos12a]. Tout ceci nous est indispensable pour la preuve du théorème 1.1.

La plupart de l'article consiste en l'étude d'un foncteur $\Pi \rightarrow \Pi_c^{P\text{-fni}}$ sur $\text{Rep}_L(\delta)$. L'espace $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est formé des vecteurs $v \in \Pi$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

- il existe $n, k \in \mathbf{N}^*$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\left(\sum_{i=0}^{p^n-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^k \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = 0 ;$$

- l'espace $L \left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] v$ est de dimension finie sur L .

Supposons dans la suite que tous les facteurs de Jordan–Hölder de Π sont supersinguliers. Un résultat remarquable de Colmez [Col10b] est que tout vecteur de $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est en fait localement analytique, et que l'espace $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est assez gros (dans [Col10b] ceci est démontré pour les objets irréductibles et pour un sous-espace de $\Pi_c^{P\text{-fni}}$, mais les arguments restent essentiellement les mêmes dans le cas général). La preuve de ce résultat est très indirecte, malgré la description très simple⁷ de $\Pi_c^{P\text{-fni}}$. Elle utilise la description explicite de $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ en termes du (φ, Γ) -module attaché à Π , la théorie de Sen [Sen81] et surtout une identité un peu miraculeuse due à Colmez. Cette identité permet de calculer l'action d'un élément de $(\Pi^{\text{an}})^*$ sur un vecteur dans $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ purement en termes de (φ, Γ) -modules. Nous étendons tous ces résultats de Colmez à notre contexte et nous donnons une nouvelle preuve de cette identité miraculeuse de Colmez. Comme conséquence, nous prouvons le résultat suivant (B étant le Borel supérieur de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$).

THÉORÈME 1.7. *Soit $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ dont tous les facteurs de Jordan–Hölder sont supersinguliers. Alors $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est un sous-espace dense de Π , contenu dans Π^{an} et stable sous l'action de B .*

On peut aussi montrer [Dos12b] que si Π est supersingulier, alors $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est dense dans Π^{an} si et seulement si $V(\Pi)$ n'est pas trianguline (la preuve est nettement plus délicate que celle du théorème 5.6). On déduit du théorème 5.6 et de sa définition que $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est un sous-espace de

$$(\Pi^{\text{an}})^{U\text{-fni}} = \varinjlim_n (\Pi^{\text{an}})^{(u^+)^n=0},$$

où u^+ désigne l'action infinitésimale de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En particulier, $(\Pi^{\text{an}})^{U\text{-fni}}$ est dense dans Π (mais il n'est pas toujours dense dans Π^{an}).

Pour l'étude des vecteurs localement algébriques, il faut introduire un sous-espace $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ de $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ qui est un avatar de Π^{alg} . Soient Π, Π_1 comme dans le théorème 1.1 et supposons

⁷ Le lecteur pourra essayer de montrer que $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est stable sous l'action du groupe de Borel directement à partir de la définition de $\Pi_c^{P\text{-fni}}$

(ce que l'on peut quitter à tordre par un caractère algébrique) que les poids de Hodge–Tate de $V(\Pi)$ sont 0 et k , avec $k \in \mathbf{N}^*$. On note $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ le sous-espace de $\Pi_c^{P\text{-fini}}$ formé des vecteurs v tels que

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left(\begin{pmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (1+p^n)^{i+1-k} \right) v = 0$$

pour tout n assez grand (il suffit que ce soit vrai pour un seul n). Si $v \in \Pi_c^{P\text{-alg}}$, alors l'application $g \rightarrow (\det g)^{k-1} g \cdot v$ est localement polynômiale de degré plus petit que k sur le Borel B . Le résultat technique principal, dont la preuve occupe la quasi-totalité de l'article est alors le suivant.

THÉORÈME 1.8. *Soient Π, Π_1 comme dans le théorème 1.1.*

- (a) Si $\Pi_1^{\text{alg}} \neq \Pi^{\text{alg}}$, alors la représentation $V(\Pi_1)$ est de Hodge–Tate.
- (b) Si $V(\Pi_1)$ est de Hodge–Tate, alors $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ et $\Pi_{1,c}^{P\text{-alg}}$ sont stables sous l'action de B et on a une suite exacte scindée de B -modules

$$0 \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}} \rightarrow \Pi_{1,c}^{P\text{-alg}} \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}} \rightarrow 0.$$

- (c) $V(\Pi_1)$ est de de Rham si et seulement si $\Pi_{1,c}^{P\text{-alg}} \subset \Pi_1^{\text{alg}}$.

Il est clair que le théorème 1.1 est une conséquence du théorème 1.8 ci-dessus. Le (a) est le contenu du chapitre 3 et découle d'une analyse de l'action infinitésimale de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur Π_1^{an} (qui généralise le résultat principal de [Dos12a]). Le (b) est la réunion des chapitres 4, 5 et 6, et le (c) est démontré dans le chapitre 7.

1.4 Notations

On fixe une extension finie L de \mathbf{Q}_p et une suite $(\varepsilon^{(n)})_{n \geq 0}$ de racines p^n -ièmes de l'unité, telle que $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ pour tout $n \geq 0$. On pose $F_n = \mathbf{Q}_p(\varepsilon^{(n)})$, $L_n = L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F_n$ et $L_\infty = \bigcup_{n \geq 1} L_n$. On note $\chi : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique, $H = \text{Ker}(\chi)$ et $\Gamma = \text{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$. Ainsi, χ induit un isomorphisme $\Gamma \simeq \mathbf{Z}_p^*$, et on note $a \rightarrow \sigma_a$ son inverse (on a donc $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$ pour $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $\zeta \in \mu_{p^\infty}$). Si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow O_L^*$ est un caractère unitaire, on note $w(\delta)$ son poids, défini par $w(\delta) = \delta'(1)$, dérivée de δ en 1.

Si Π est une L -représentation de Banach de G , on note Π^{an} le sous-espace des vecteurs localement analytiques de Π (i.e. les vecteurs $v \in \Pi$ dont l'application orbite $g \mapsto g \cdot v$ est localement analytique sur G , à valeurs dans Π), et $\Pi^{\text{alg}} \subset \Pi^{\text{an}}$ le sous-espace des vecteurs localement algébriques (l'application orbite est donc localement polynômiale). On renvoie à [Eme(b), ST03, CD14] pour l'étude du foncteur $\Pi \rightarrow \Pi^{\text{an}}$.

2. Rappels et compléments

Ce chapitre est purement préliminaire, le but étant de fixer des notations et de rappeler quelques résultats et constructions que l'on utilisera plus loin.

2.1 (φ, Γ) -modules

Soit \mathcal{R} l'anneau de Robba, i.e. l'anneau des séries de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in L[[T, T^{-1}]]$ qui convergent sur une couronne du type $0 < v_p(T) \leq r$ (r dépend de la série). On note \mathcal{E}^\dagger le sous-anneau de \mathcal{R} formé des séries à coefficients bornés et on note \mathcal{E} le complété p -adique de \mathcal{E}^\dagger . Alors \mathcal{E}^\dagger et \mathcal{E} sont des corps et $\mathcal{E}^\dagger \subset \mathcal{E}$. On munit \mathcal{R} d'actions L -linéaires continues de φ et Γ en posant (pour $a \in \mathbf{Z}_p^*$)

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1, \quad \sigma_a(T) = (1+T)^a - 1.$$

Ces actions laissent stable \mathcal{E}^\dagger et se prolongent par continuité en des actions sur \mathcal{E} . On dispose d'un inverse à gauche ψ de φ sur ces anneaux, qui commute à l'action de Γ : si Λ est un de ces anneaux, alors tout élément $f \in \Lambda$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(f_i)$ avec $f_i \in \Lambda$, et on a $\psi(f) = f_0$.

Soit $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ la catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur \mathcal{E} . Ses objets sont les \mathcal{E} -espaces vectoriels D de dimension finie, munis d'actions semi-linéaires continues de φ et de Γ , qui commutent et telles que l'action de φ soit étale.⁸ La catégorie $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ est équivalente à la catégorie $\text{Rep}_L(G_{\mathbf{Q}_p})$ des L -représentations continues, de dimension finie de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, d'après un théorème de Fontaine [Fon90]. On notera $V(D)$ (respectivement $D(V)$) la représentation galoisienne (respectivement le (φ, Γ) -module étale) associée à D (respectivement V).

DÉFINITION 2.1. Le dual de Cartier \check{D} d'un (φ, Γ) -module étale D est

$$\check{D} = D(V(D)^* \otimes \chi),$$

où $V(D)^*$ désigne le L -dual de $V(D)$.

Pour tout $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ il existe un plus grand sous- \mathcal{E}^\dagger -espace vectoriel de dimension finie D^\dagger qui est stable par φ . De plus, D^\dagger est stable par Γ et $D = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} D^\dagger$ d'après [CC98]. On pose $D_{\text{rig}} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} D^\dagger$, un (φ, Γ) -module pur de pente nulle sur \mathcal{R} .

2.2 Le dictionnaire $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) - \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

On fixe un caractère unitaire $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow O_L^*$ et on renvoie au premier paragraphe de l'introduction pour la définition de la catégorie $\text{Rep}_L(\delta)$. On dispose [Col10b, ch. IV] du foncteur de Colmez

$$\text{Rep}_L(\delta) \rightarrow \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E}), \quad \Pi \mapsto D(\Pi),$$

qui est contravariant et exact. On note $\mathcal{C}_L(\delta)$ son image essentielle.

Dans l'autre sens, pour tout $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ on définit [Col10b, ch. II] un faisceau G -équivariant⁹ $U \rightarrow D \boxtimes_\delta U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, dont les sections sur \mathbf{Z}_p sont D . Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p , on dispose d'une application d'extension par 0 qui permet de voir $D \boxtimes_\delta U$ comme sous-module de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Puisque $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Z}_p \cup \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Z}_p$, l'espace des sections globales $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de ce faisceau s'injecte naturellement dans $D \times D$, ce qui permet de le munir de la topologie induite, D étant muni de la topologie faible. En tant que L -espace vectoriel topologique, $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est une extension d'un L -espace de Banach par le dual d'un L -espace de Banach. En effet, on a un isomorphisme d'espaces topologiques $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \simeq D \times D \simeq \mathcal{E}^{2 \dim_{\mathcal{E}}(D)}$ (le premier étant induit par $z \mapsto (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z), \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z))$, le second par le choix d'une base de D), ainsi qu'une suite exacte fondamentale de Colmez [Col10b, remarque 0.2]

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p, L) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, L) \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$ est l'espace des mesures sur \mathbf{Z}_p à valeurs dans L (dual faible du L -Banach $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions continues sur \mathbf{Z}_p à valeurs dans L). En général, il n'existe pas de telle décomposition de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ qui soit en plus G -équivariante, mais le théorème suivant montre que c'est le cas si $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ (le lecteur pourra vérifier que la réciproque est vraie).

THÉORÈME 2.2. (a) Si $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$, alors $\check{D} \in \mathcal{C}_L(\delta^{-1})$.

⁸ Cela veut dire que D a une base dans laquelle la matrice de φ est dans $\text{GL}_d(O_{\mathcal{E}})$, $O_{\mathcal{E}}$ étant l'anneau des entiers de \mathcal{E} .

⁹ L'action de G sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ est celle usuelle, par des homographies.

(b) Il existe un foncteur covariant

$$\mathcal{C}_L(\delta) \rightarrow \text{Rep}_L(\delta), \quad D \rightarrow \Pi_\delta(D)$$

tel que pour tout $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ on ait une suite exacte de G -modules topologiques

$$0 \rightarrow \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^* \rightarrow D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow 0.$$

(c) On a $D(\Pi_\delta(D)) = \check{D}$ pour tout $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$.

(d) Si tous les facteurs de Jordan–Hölder de Π sont supersinguliers,¹⁰ alors on a un isomorphisme canonique $\Pi_\delta(\check{D}(\Pi)) \simeq \Pi$.

Démonstration. C’est la réunion des théorèmes III.4, III.49, de la remarque III.32 et du corollaire III.47 de [CD14]. □

Pour tout $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ on montre [CD14, ch. VI] que le faisceau $U \rightarrow D \boxtimes_\delta U$ induit un faisceau G -équivariant $U \rightarrow D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, dont les sections sur \mathbf{Z}_p sont D_{rig} . On note $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ l’espace des sections globales de ce faisceau.

THÉORÈME 2.3. Pour tout $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ il existe une suite exacte de G -modules topologiques

$$0 \rightarrow (\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^{\text{an}})^* \rightarrow D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_\delta(D)^{\text{an}} \rightarrow 0.$$

De plus, $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un module topologique sur l’algèbre des distributions de $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et la suite exacte précédente est une suite exacte de modules topologiques sur cette algèbre.

Démonstration. C’est la réunion de la proposition VI.7 et du corollaire VI.12 de [CD14]. □

2.3 Anneaux de périodes p -adiques

On renvoie à [Fon82] et [Col08] pour les preuves des résultats énoncés dans ce §. On note \mathbf{C}_p le complété de $\overline{\mathbf{Q}_p}$, $O_{\mathbf{C}_p}$ l’anneau de ses entiers et $\tilde{\mathbf{E}}^+ = \varprojlim_{x \rightarrow x^p} O_{\mathbf{C}_p}/p$. Alors $\tilde{\mathbf{E}}^+$ est un anneau parfait de caractéristique p , et on note $\tilde{\mathbf{E}}$ son corps des fractions. Les anneaux de Fontaine $\tilde{\mathbf{A}}^+$ et $\tilde{\mathbf{A}}$ sont les anneaux des vecteurs de Witt à coefficients dans $\tilde{\mathbf{E}}^+$ et $\tilde{\mathbf{E}}$. On pose $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}[1/p]$ et $\tilde{\mathbf{B}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+[1/p]$. Les anneaux $\tilde{\mathbf{A}}^+, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}^+, \tilde{\mathbf{B}}$ sont munis d’un Frobenius bijectif φ et d’une action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, qui commutent. Le choix (voir le § 1.4) des racines p^n -ièmes de l’unité $\varepsilon^{(n)}$ permet de définir¹¹ un élément T de $(\tilde{\mathbf{A}}^+)^H$, tel que $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$ pour $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Le séparé complété \mathbf{B}_{dR}^+ de $\tilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie $T/(\varphi^{-1}(T))$ -adique est un anneau de valuation discrète, d’uniformisante $T/(\varphi^{-1}(T))$ ou $t = \log(1+T)$, et de corps résiduel \mathbf{C}_p . On note $\mathbf{B}_{\text{dR}} = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[1/t]$ le corps des fractions de \mathbf{B}_{dR}^+ .

L’inclusion $\mathbf{Z}_p[T] \subset \tilde{\mathbf{A}}^+$ s’étend en une inclusion $\mathbf{Z}_p[[T]] \subset \tilde{\mathbf{A}}^+$, ce qui permet de définir, pour $b \in \mathbf{Q}_p$ et $n \geq -v_p(b)$, un élément

$$[(1+T)^b] = \varphi^{-n}((1+T)^{p^{nb}}) \in (\tilde{\mathbf{A}}^+)^H,$$

qui ne dépend pas du choix de n . On définit aussi $\varepsilon(b) = (\varepsilon^{(n)})^{p^{nb}}$ pour $n \geq -v_p(b)$, obtenant ainsi un caractère localement constant $\varepsilon : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mu_{p^\infty}$, tel que

$$[(1+T)^b] = \varepsilon(b) \cdot e^{tb} \in (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H.$$

Le lemme suivant est standard et nous l’utiliserons plusieurs fois dans la suite. Pour le confort du lecteur, on en donne une preuve.

¹⁰ Rappelons qu’un objet Π de $\text{Rep}_L(\delta)$ est dit supersingulier si Π est absolument irréductible et pas isomorphe à un sous-quotient de l’induite parabolique d’un caractère unitaire.

¹¹ $1+T$ est le représentant de Teichmüller de l’élément $(\varepsilon^{(0)} \pmod{p}, \varepsilon^{(1)} \pmod{p}, \dots)$ de $\tilde{\mathbf{E}}^+$.

LEMME 2.4. (a) Soit $a \in \mathbf{Z}$. Alors $\varphi^a(T) \in t\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ si et seulement si $a \geq 0$. Dans ce cas, on a $\varphi^a(T)/\varphi^b(T) \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ pour tout $b \in \mathbf{Z}$.

(b) Si $j \notin [1, n]$, alors $\varphi^{-j}(T/\varphi^n(T)) \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$.

(c) Soit $x \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ et $k \geq 1$. Alors $x \in T^k \tilde{\mathbf{A}}^+$ si et seulement si $\varphi^n(x) \in t^k \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Le point (a) découle du fait que $\varphi^n(T) = e^{p^n t} - 1 \equiv p^n t \pmod{t^2 \mathbf{B}_{\text{dR}}^+}$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\varphi^{-n}(T) = \varepsilon^{(n)} e^{t/p^n} - 1 \equiv \varepsilon^{(n)} - 1 \neq 0 \pmod{t \mathbf{B}_{\text{dR}}^+},$$

pour $n \geq 1$. Le (b) est une conséquence immédiate du (a). En ce qui concerne (c), un sens étant évident, supposons que $\varphi^n(x) \in t^k \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ pour tout $n \geq 0$ et montrons que $x \in T^k \tilde{\mathbf{A}}^+$. Pour $k = 1$, c'est un résultat standard [Col98, lemme III.3.7]. Si $k > 1$, le cas $k = 1$ nous dit qu'il existe $y \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ tel que $x = Ty$. Alors $\varphi^n(y) \in t^{k-1}(t/\varphi^n(T))\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = t^{k-1}\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ (par la preuve de (a)), ce qui permet de conclure par récurrence sur k . \square

2.4 Sous-modules de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(D)$ et connexions

Pour tout $n \geq 1$, on note

$$r_n = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$$

et on note $\mathcal{E}^{[0, r_n]}$ l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $0 < v_p(T) \leq r_n$, définies sur L . Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$, alors on peut trouver $m(D)$ assez grand et, pour tout $n \geq m(D)$, un unique sous $\mathcal{E}^{[0, r_n]}$ -module $D^{[0, r_n]}$ de D_{rig} tel que :

- $D_{\text{rig}} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^{[0, r_n]}} D^{[0, r_n]}$; et
- $\mathcal{E}^{[0, r_{n+1}]} \otimes_{\mathcal{E}^{[0, r_n]}} D^{[0, r_n]}$ possède une base contenue dans $\varphi(D^{[0, r_n]})$.

Le module $D^{[0, r_n]}$ est stable sous l'action de Γ et $\varphi(D^{[0, r_n]}) \subset D^{[0, r_{n+1}]}$ pour $n \geq m(D)$ (voir [Ber08, théorème I.3.3] pour ces résultats).

Rappelons que $H = \text{Ker}(\chi)$ et posons

$$\tilde{D}_{\text{dif}} = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(D))^H, \quad \tilde{D}_{\text{dif}}^+ = (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(D))^H.$$

On dispose [Dos12a, définition 4] d'un morphisme $\varphi^{-n} : D^{[0, r_n]} \rightarrow \tilde{D}_{\text{dif}}^+$ de localisation en $\varepsilon^{(n)} - 1$, qui est $L[\Gamma]$ -linéaire et injectif. On note $D_{\text{dif}, n}^+$ le sous $L_n[[t]]$ -module¹² de \tilde{D}_{dif}^+ engendré par $\varphi^{-n}(D^{[0, r_n]})$. C'est un $L_n[[t]]$ -module libre de rang $\dim_{\mathcal{E}}(D)$ si $n \geq m(D)$, et il est stable sous l'action de Γ . Enfin, on note $D_{\text{dif}, n} = L_n((t)) \otimes_{L_n[[t]]} D_{\text{dif}, n}^+$. Si $V(D)$ est de de Rham, alors on a un isomorphisme canonique $D_{\text{dif}, n} \simeq L_n((t)) \otimes_L D_{\text{dR}}(V)$, où $D_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}$.

Un résultat standard de Berger [Ber02, lemme 4.1] montre que l'action de Γ sur D_{rig} se dérive, d'où une connexion

$$\nabla : D_{\text{rig}} \rightarrow D_{\text{rig}}, \quad \nabla(z) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\sigma_a(z) - z}{a - 1},$$

qui préserve $D^{[0, r_n]}$ pour $n \geq m(D)$. L'action de Γ sur $D_{\text{dif}, n}^+$ (avec $n \geq m(D)$) se dérive aussi, d'où une connexion $L_n[\Gamma]$ -linéaire ∇ sur $D_{\text{dif}, n}^+$, au-dessus de la connexion $t(d/dt)$ sur $L_n[[t]]$. Cette connexion ∇ induit un endomorphisme du L_n -module libre de type fini $D_{\text{Sen}, n} := D_{\text{dif}, n}^+ / tD_{\text{dif}, n}^+$. Les valeurs propres (respectivement le polynôme caractéristique) de cet endomorphisme sont les poids de Hodge–Tate généralisés (respectivement le polynôme $P_{\text{Sen}, D}$ de Sen) de D . On note $\Theta_{\text{Sen}, D}$ l'opérateur de Sen, i.e. l'opérateur $\nabla \pmod{t}$ agissant sur la réunion des $D_{\text{Sen}, n}$. Nous aurons besoin de l'extension suivante de [Dos12a, proposition 2].

¹² \tilde{D}_{dif}^+ est naturellement un module sur $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H$ et on a une injection canonique $L_n[[t]] \rightarrow L \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H$.

PROPOSITION 2.5. Si $P \in L[X]$, alors $P(\Theta_{\text{Sen},D}) = 0$ équivaut à $P(\nabla)(D_{\text{rig}}) \subset t \cdot D_{\text{rig}}$.

Démonstration. Si $z \in D_{\text{rig}}$ et $\varphi^{-n}(z) \in tD_{\text{dif},n}^+$ pour tout n assez grand, alors $z \in tD_{\text{rig}}$ d'après [Ber02, lemmes 5.1, 5.4]. Ensuite, D_{rig} est la réunion des $D^{[0,r_n]}$, qui sont stables par ∇ pour n assez grand et satisfont $D^{[0,r_n]} \cap tD_{\text{rig}} = tD^{[0,r_n]}$. En utilisant tout ceci et le fait que φ^{-n} commute à ∇ , on obtient que $P(\nabla)(D_{\text{rig}}) \subset t \cdot D_{\text{rig}}$ si et seulement si $P(\nabla)(\varphi^{-n}(D^{[0,r_n]})) \subset t \cdot D_{\text{dif},n}^+$ pour tout n assez grand. Cela équivaut à $P(\nabla)(D_{\text{dif},n}^+) \subset t \cdot D_{\text{dif},n}^+$ pour n assez grand, et arrive si et seulement si $P(\Theta_{\text{Sen},D}) = 0$, ce qui permet de conclure. \square

3. Extensions de Hodge–Tate

Soit $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{E})$ de dimension 2, tel que $V(D)$ soit absolument irréductible, de de Rham, à poids de Hodge–Tate 1 et $1 - k$, avec $k \in \mathbf{N}^*$. Ainsi, les poids de Hodge–Tate de \check{D} sont 0 et k . On note $\delta = \chi^{-1} \det V(D)$, que l'on voit comme caractère unitaire de \mathbf{Q}_p^* par la théorie locale du corps de classes. Notons que $w(\delta) = 1 - k$. D'après le théorème fondamental [Col10b, théorème II.3.1] de la correspondance de Langlands locale p -adique pour $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (dont les derniers cas restants sont traités dans [CDP14a, CDP14b]), on a $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$. De plus, $\Pi_\delta(D)^{\text{alg}} \neq 0$, d'après un théorème profond de Colmez [Col10b, théorème 0.20].

On fixe une extension non scindée $0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow 0$ telle que $E \in \mathcal{C}_L(\delta)$. La suite $0 \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow \Pi_\delta(E) \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow 0$ est alors exacte¹³ [CD14, remarque III.31] dans $\text{Rep}_L(\delta)$. Nous allons montrer que si $\Pi_\delta(E)^{\text{alg}} \neq \Pi_\delta(D)^{\text{alg}}$, alors E est de Hodge–Tate et l'action de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{gl}_2)$ de $\mathfrak{gl}_2 = \text{Lie}(\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p))$ sur $\Pi_\delta(E)^{\text{an}}$ est particulièrement simple. Ceci jouera un rôle fondamental dans les chapitres suivants.

3.1 L'élément de Casimir

Si $\mathcal{D} \in \mathcal{C}_L(\delta)$, le théorème 2.3 munit $\mathcal{D}_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ d'une action naturelle de $U(\mathfrak{gl}_2)$, qui laisse stable $\mathcal{D}_{\text{rig}} = \mathcal{D}_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p \subset \mathcal{D}_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (ce dernier point découle de [CD14, proposition VI.8]). On note

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2$$

et on considère l'élément de Casimir

$$C = u^+u^- + u^-u^+ + \frac{1}{2}h^2 \in U(\mathfrak{gl}_2).$$

Alors C induit un endomorphisme du L -espace vectoriel topologique \mathcal{D}_{rig} .

THÉORÈME 3.1. (a) L'opérateur C sur \mathcal{D}_{rig} est \mathcal{R} -linéaire et commute avec φ et Γ .

(b) On a une égalité d'opérateurs sur \mathcal{D}_{rig}

$$C = 2tu^- + \frac{(2\nabla - (w(\delta) + 1))^2 - 1}{2}.$$

Démonstration. Pour le point (a), voir le premier paragraphe de la preuve du théorème 6 de [Dos12a] (il y a des hypothèses supplémentaires dans [Dos12a], mais la preuve marche telle quelle dans ce degré de généralité puisqu'elle n'utilise que le fait que C commute à l'action

¹³ Attention au fait que le foncteur $D \rightarrow \Pi_\delta(D)$ n'est pas exact de $\mathcal{C}_L(\delta)$ dans $\text{Rep}_L(\delta)$; il faut quotienter $\text{Rep}_L(\delta)$ par la sous-catégorie des représentations de dimension finie pour obtenir un foncteur exact, voir [CD14, théorème III.4].

adjointe de G). Le (b) se démontre comme le lemme 2 de [Dos12a], la seule différence étant le calcul de l'action de h . Comme celui-ci ne pose aucun problème (voir la preuve de la proposition 4 de [Dos12a]), cela permet de conclure. \square

Remarque 3.2. (a) Soit $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ un objet supersingulier. Le corollaire III.47 de [CD14] montre que le dual de Cartier \mathcal{D} de $D(\Pi)$ est absolument irréductible, de dimension au moins 2 (en fait de dimension exactement 2, voir [CDP14a]), et $\Pi \simeq \Pi_\delta(\mathcal{D})$. On en déduit que $\text{End}_{\varphi, \Gamma, \mathcal{R}}(\mathcal{D}_{\text{rig}}) = L$ et donc C agit par une constante $c \in L$ sur \mathcal{D}_{rig} . Le théorème précédent montre que $((2\nabla - (w(\delta) + 1))^2 - 1)/2 - c$ envoie \mathcal{D}_{rig} dans $t \cdot \mathcal{D}_{\text{rig}}$ et la proposition 2.5 permet de conclure que

$$(2\Theta_{\text{Sen}, \mathcal{D}} - (1 + w(\delta)))^2 = 2c + 1.$$

Cette relation joue un rôle important dans [CDP14a], où elle est utilisée pour montrer que l'on a forcément $\det V(\Pi) = \chi \cdot \delta$.

(b) Supposons que D est de dimension 2, à poids de Hodge–Tate généralisés $a, b \in L$, et que $\delta = \chi^{-1} \det V(D)$. Notons $\Pi = \Pi_\delta(D)$. Sous l'hypothèse que D est absolument irréductible, un des résultats principaux de [Dos12a] (plus précisément le théorème 1.2 de [Dos12a]) affirme que C agit sur Π^{an} par le scalaire $((a - b)^2 - 1)/2$. Même si l'hypothèse d'irréductibilité absolue est utilisée de manière cruciale dans [Dos12a], elle n'est pas nécessaire (de telle sorte que le résultat de [Dos12a] est valable même quand D est réductible). En effet, soit D^\dagger le (φ, Γ) -module surconvergent de D . Comme C est un endomorphisme du (φ, Γ) -module D_{rig} qui est pur de pente 0, il doit laisser stable $D^\dagger \subset D_{\text{rig}}$. Mais le théorème 3.1 combiné avec la proposition 2.5 montre que $C_1 := C - ((a - b)^2 - 1)/2$ envoie D_{rig} dans tD_{rig} . Ainsi, on a $C_1(D^\dagger) \subset D^\dagger \cap tD_{\text{rig}} = 0$, la dernière égalité étant une conséquence du fait que $\mathcal{E}^\dagger \cap t\mathcal{R} = 0$. On en déduit que C_1 s'annule sur D^\dagger et donc sur $D_{\text{rig}} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} D^\dagger$. Puisque C_1 (vu comme endomorphisme de $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$) commute à l'action de G et comme $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = D_{\text{rig}} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D_{\text{rig}}$, on en déduit que $C_1 = 0$ sur $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, donc aussi sur le quotient Π^{an} .

3.2 Caractérisation des extensions de Hodge–Tate

On revient aux hypothèses du début de ce chapitre. Il découle de la proposition 2.5 (appliquée à \check{D} et à son polynôme de Sen $X(X - k)$) et du théorème 3.1 que l'élément de Casimir C agit par multiplication par $(k^2 - 1)/2$ sur $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et que pour tout $z \in \check{D}_{\text{rig}}$ on a

$$u^-(z) = \frac{\nabla(k - \nabla)(z)}{t}.$$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

THÉORÈME 3.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) \check{E} est de Hodge–Tate ;
- (b) On a $\Theta_{\text{Sen}, \check{E}}^2 = k \cdot \Theta_{\text{Sen}, \check{E}}$;
- (c) L'élément de Casimir agit par multiplication par $(k^2 - 1)/2$ sur $\check{E}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$;
- (d) Pour tout $z \in \check{E}_{\text{rig}}$ on a

$$u^-(z) = \frac{\nabla(k - \nabla)(z)}{t}.$$

Démonstration. Par définition, \check{E} est de Hodge–Tate si et seulement si $\Theta_{\text{Sen}, \check{E}}$ est diagonalisable à valeurs propres entières. La suite exacte $0 \rightarrow \check{D} \rightarrow \check{E} \rightarrow \check{D} \rightarrow 0$ et le fait que le polynôme de Sen de \check{D} est $X(X - k)$ montrent que le polynôme de Sen de \check{E} est $X^2(X - k)^2$, donc les

valeurs propres de $\Theta_{\text{Sen}, \check{E}}$ sont 0 et k . Puisque $k \neq 0$, l'égalité $\Theta_{\text{Sen}, \check{E}}^2 = k \cdot \Theta_{\text{Sen}, \check{E}}$ entraîne automatiquement que $\Theta_{\text{Sen}, \check{E}}$ est diagonalisable. Cela montre que (a) et (b) sont équivalents.

L'équivalence entre (c) et (d) est une conséquence immédiate du théorème 3.1 appliqué à \check{E}_{rig} et δ^{-1} (noter que $w(\delta^{-1}) = k - 1$). Si (d) est vraie, alors en posant $P(X) = X(k - X)$, on a $P(\nabla)(\check{E}_{\text{rig}}) \subset t\check{E}_{\text{rig}}$, puisque u^- laisse stable \check{E}_{rig} . En utilisant la proposition 2.5, on obtient $\Theta_{\text{Sen}, \check{E}}^2 = k \cdot \Theta_{\text{Sen}, \check{E}}$, ce qui montre que (d) entraîne (b).

Supposons maintenant que (b) est vraie et montrons le (c). La suite exacte

$$0 \rightarrow \check{D}_{\text{rig}} \rightarrow \check{E}_{\text{rig}} \rightarrow \check{D}_{\text{rig}} \rightarrow 0$$

nous permet de voir \check{E}_{rig} comme une déformation de \check{D}_{rig} à $L[\varepsilon] = L[X]/X^2$. Comme cette suite exacte n'est pas scindée (sinon la suite $0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow 0$ serait aussi scindée) et comme D (et donc \check{D}) est absolument irréductible, on obtient $\text{End}_{\varphi, \Gamma, \mathcal{R}}(\check{E}_{\text{rig}}) = L[\varepsilon]$. On en déduit, en utilisant le théorème 3.1, l'existence de $a, b \in L$ tels que $Cz = (a + b\varepsilon)z$ pour tout $z \in \check{E}_{\text{rig}}$. Puisque $w(\delta^{-1}) = k - 1$, la partie (b) du théorème 3.1 montre que l'on a une égalité d'opérateurs

$$C - \frac{k^2 - 1}{2} = 2tu^- + \frac{(2\nabla - k)^2 - k^2}{2}$$

sur \check{E}_{rig} . Or la proposition 2.5 et l'hypothèse que (b) est satisfaite entraînent l'inclusion

$$\frac{(2\nabla - k)^2 - k^2}{2}(\check{E}_{\text{rig}}) \subset t \cdot \check{E}_{\text{rig}}.$$

Ainsi, $(a - (k^2 - 1)/2)z + b\varepsilon(z) \in t \cdot \check{E}_{\text{rig}}$ pour tout $z \in \check{E}_{\text{rig}}$. En prenant $z \in \text{Ker}(\varepsilon) = \check{D}_{\text{rig}} \subset \check{E}_{\text{rig}}$ on obtient $(a - (k^2 - 1)/2)\check{D}_{\text{rig}} \subset t \cdot \check{D}_{\text{rig}}$, donc $a = (k^2 - 1)/2$. On en déduit que $b \cdot \varepsilon(\check{E}_{\text{rig}}) \subset t \cdot \check{E}_{\text{rig}}$ et comme $\varepsilon(\check{E}_{\text{rig}}) = \check{D}_{\text{rig}}$, on a finalement $b = 0$ et $C = (k^2 - 1)/2$. Cela permet de conclure. \square

Posons

$$\nabla_{2k} = \prod_{i=0}^{2k-1} (\nabla - i).$$

COROLLAIRE 3.4. Si E est de Hodge–Tate et si $\mathcal{D} \in \{D, E\}$, alors

$$(u^-)^k(\check{z}) = (-1)^k \frac{\nabla_{2k}(\check{z})}{t^k}$$

pour tout $\check{z} \in \check{\mathcal{D}}_{\text{rig}}$.

Démonstration. Le théorème 3.3 et la discussion qui le précède montrent que

$$u^-(\check{z}) = \frac{\nabla(k - \nabla)(\check{z})}{t}$$

pour tout $\check{z} \in \check{\mathcal{D}}_{\text{rig}}$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire la relation

$$(u^-)^j(\check{z}) = \frac{\nabla(\nabla - 1) \cdot s(\nabla - j + 1)(k - \nabla)(k + 1 - \nabla) \cdot s(k + j - 1 - \nabla)(\check{z})}{t^j},$$

pour tout $j \geq 1$ et $\check{z} \in \check{\mathcal{D}}_{\text{rig}}$. On conclut en prenant $j = k$. \square

3.3 Application à l'étude de $\Pi_\delta(E)^{\text{alg}}$

Si $k \geq 1$ et l sont des entiers, on note

$$W_{l,k} = \text{Sym}^{k-1}(L^2) \otimes \det^l,$$

où $\text{Sym}^{k-1}(L^2)$ est la puissance symétrique $(k - 1)$ -ième de la représentation standard de G sur $L \oplus L$.

PROPOSITION 3.5. *Il existe des représentations lisses admissibles $\Pi_\delta(D)^{\text{lc}}$ et $\Pi_\delta(E)^{\text{lc}}$ telles que $\Pi_\delta(D)^{\text{alg}} = W_{1-k,k} \otimes \Pi_\delta(D)^{\text{lc}}$ et $\Pi_\delta(E)^{\text{alg}} = W_{1-k,k} \otimes \Pi_\delta(E)^{\text{lc}}$.*

Démonstration. L’assertion concernant $\Pi_\delta(D)^{\text{alg}}$ découle de [Dos12a, proposition 11], en tordant par χ^{k-1} . La preuve de [Dos12a] (ou encore [Paš12, Lemma 4.9]) montre que $\Pi_\delta(D)^{\text{alg}}$ ne contient aucune représentation du type $W_{l',k'} \otimes \pi$, avec π lisse et $(l', k') \neq (1 - k, k)$. En utilisant ceci, la suite exacte $0 \rightarrow \Pi_\delta(D)^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_\delta(E)^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_\delta(D)^{\text{alg}}$ et [Dos12a, proposition 10], le résultat s’ensuit. \square

Remarque 3.6. L’existence de $\Pi_\delta(D)^{\text{lc}}$ est un résultat de Colmez [Col10b, proposition VI.5.1], qu’il démontre en utilisant sa théorie du modèle de Kirillov de $\Pi_\delta(D)^{\text{alg}}$. La preuve de [Dos12a] n’utilise que les caractères centraux et infinitésimaux de $\Pi_\delta(D)^{\text{an}}$.

PROPOSITION 3.7. *Si $\Pi_\delta(E)^{\text{alg}} \neq \Pi_\delta(D)^{\text{alg}}$, alors E est de Hodge–Tate.*

Démonstration. Notons pour simplifier $\Pi = \Pi_\delta(D)$ et $\Pi_1 = \Pi_\delta(E)$. La suite exacte

$$0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow 0$$

induit une suite exacte $0 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow 0$ et donc (par exactitude [ST03, Theorem 7.1] du foncteur $\Pi \rightarrow \Pi^{\text{an}}$) une suite exacte $0 \rightarrow \Pi^{\text{an}} \rightarrow \Pi_1^{\text{an}} \rightarrow \Pi^{\text{an}} \rightarrow 0$. Cela munit Π_1^{an} d’une structure de $L[\varepsilon]$ -module (si ι est l’injection de Π^{an} dans Π_1^{an} et π est la projection de Π_1^{an} sur Π^{an} , alors ε agit par $i \circ \pi$), compatible avec la structure de $L[\varepsilon]$ -module sur E_{rig} (qui, elle, est définie par la même recette à partir de la suite exacte $0 \rightarrow D_{\text{rig}} \rightarrow E_{\text{rig}} \rightarrow D_{\text{rig}} \rightarrow 0$).

La preuve du théorème 3.3 montre l’existence de $a, b \in L$ tels que $C(z) = (a + b\varepsilon)z$ pour tout $z \in E_{\text{rig}}$, où C est l’élément de Casimir. Puisque Π_1^{an} est un quotient de $E_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (théorème 2.3), on conclut que C agit par $a + b\varepsilon$ sur Π_1^{an} . La proposition 3.5 montre que $C(v) = ((k^2 - 1)/2)v$ pour tout $v \in \Pi_1^{\text{alg}}$. En prenant $v \in \Pi^{\text{alg}} \subset \Pi_1^{\text{alg}}$ non nul, on obtient $av = ((k^2 - 1)/2)v$ et donc $a = (k^2 - 1)/2$. Ainsi, on a $b \cdot \varepsilon v = 0$ pour tout $v \in \Pi_1^{\text{alg}}$. On en déduit que si $\Pi_1^{\text{alg}} \neq \Pi^{\text{alg}}$, alors $b = 0$ et C agit par $(k^2 - 1)/2$ sur $E_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Or, on dispose [CD14, § VI.3] d’un accouplement G -équivariant parfait entre $E_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $\check{E}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, ce qui fait que C agit aussi par $(k^2 - 1)/2$ sur $\check{E}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Le théorème 3.3 montre que \check{E} est de Hodge–Tate, donc E l’est aussi. \square

4. Vecteurs P -finis

Dans ce chapitre on étend et on raffine la théorie du modèle de Kirillov de Π^{alg} , telle qu’elle est développée dans [Col10b]. On fixe un caractère unitaire $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow O_L^*$.

4.1 Le sous-module \tilde{D} de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$

Pour tout $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ on note $\tilde{D} = (\tilde{\mathbf{B}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(D))^H$ et $\tilde{D}^+ = (\tilde{\mathbf{B}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(D))^H$, que l’on munit d’une action du groupe mirabolique $P = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en posant, pour $a \in \mathbf{Z}_p^*, k \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Q}_p$ et $z \in \tilde{D}$ (ou \tilde{D}^+)

$$\begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = [(1 + T)^b] \varphi^k \circ \sigma_a(z).$$

On étend cette action en une action du groupe de Borel B en demandant que le centre agisse par δ .

Soit $I \subset \mathbf{Q}_p$ un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et soit $I_n = I \cap p^{-n}\mathbf{Z}_p$. D'après [Col10a, lemme IV.1.2], tout élément z de \tilde{D} s'écrit de manière unique sous la forme $z = \sum_{i \in I} [(1+T)^i] z_i$, avec $z_i \in D$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = 0$. On définit une *trace de Tate normalisée*

$$T_n : \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}, \quad T_n(z) = \sum_{i \in I_n} [(1+T)^i] z_i.$$

D'après¹⁴ [Col10b, lemme II.1.16], pour tout $z \in \tilde{D}$, la suite de terme général

$$\begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \varphi^n(T_n(z)) = \sum_{i \in I_n} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z_i$$

converge dans $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et l'application $\iota : \tilde{D} \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ ainsi définie est injective et B -équivariante.

PROPOSITION 4.1. Si $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ alors $\iota : \tilde{D} \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ envoie \tilde{D}^+ dans $\Pi_{\delta-1}(\tilde{D})^*$, induisant¹⁵ un morphisme $\tilde{D}/\tilde{D}^+ \rightarrow \Pi_{\delta}(D)$, qui est un isomorphisme de B -modules topologiques si D n'a pas de facteur de Jordan–Hölder de dimension 1.

Démonstration. Le fait que ι envoie \tilde{D}^+ dans $\Pi_{\delta-1}(\tilde{D})^*$ découle de [Col10a, lemme IV.2.2] et de la description de $\Pi_{\delta-1}(\tilde{D})^*$ en fonction de D fournie par [CD14, corollaire III.22]. Soit $\tilde{D}^{\text{nr}} = \bigcap_{n \geq 1} \varphi^n(\tilde{D})$. Le corollaire III.25 et la proposition II.6 (a) de [CD14] montrent que $\tilde{D}/\tilde{D}^+ \rightarrow \Pi_{\delta}(D)$ est injectif, de conoyau isomorphe au dual de \tilde{D}^{nr} . Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\tilde{D}^{\text{nr}} = 0$ quand D n'a pas de facteur de Jordan–Hölder de dimension 1, ce qui découle de [Col10a, corollaire II.5.21]. \square

4.2 Espaces de fonctions

Soit X un $L_{\infty}[[t]]$ -module muni d'une action de Γ , semi-linéaire par rapport à l'action naturelle de Γ sur $L_{\infty}[[t]]$. On note $\text{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X)^{\Gamma}$ l'espace des fonctions $\phi : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow X$ à support compact dans \mathbf{Q}_p et satisfaisant $\phi(ax) = \sigma_a(\phi(x))$ pour tous $x \in \mathbf{Q}_p^*$ et $a \in \mathbf{Z}_p^*$. On note $\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^{\Gamma}$ le sous-espace de $\text{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X)^{\Gamma}$ formé des fonctions nulles au voisinage de 0.

Rappelons (voir le § 2.3) que l'on dispose d'un morphisme de groupes $\mathbf{Q}_p \rightarrow (\tilde{\mathbf{A}}^+)^H \subset (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H$ qui envoie b sur $[(1+T)^b] = \varepsilon(b)e^{tb} \in L_{\infty}[[t]] \subset L \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H$. Puisque $\sigma_a([(1+T)^b]) = [(1+T)^{ab}]$ pour tous $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $b \in \mathbf{Q}_p$, les espaces $\text{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X)^{\Gamma}$ et $\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^{\Gamma}$ sont munis d'une action du groupe de Borel B , définie par

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \phi \right) (x) = \delta(d)[(1+T)^{bx/d}] \phi\left(\frac{ax}{d}\right),$$

Remarque 4.2. (a) L'application $\phi \rightarrow (\phi(p^i))_{i \in \mathbf{Z}}$ induit un isomorphisme L -linéaire

$$\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^{\Gamma} \simeq \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} X.$$

(b) Notons $X(k)$ le $L_{\infty}[[t]]$ -module X muni de l'action de Γ obtenue en tordant celle de Γ sur X par χ^k . Si ζ_k est le caractère du Borel B qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ sur $a^k d^{-k}$, alors un calcul sans

¹⁴ Dans [Col10a] $\begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \varphi^n(T_n(z))$ est noté $\text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(z)$.

¹⁵ Via le (b) du théorème 2.2.

difficulté montre que l'application qui à $\phi \in \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, M(k))^\Gamma$ associe l'application $x \rightarrow x^{-k}\phi(x)$ induit un isomorphisme de B -modules

$$\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, M(k))^\Gamma \simeq \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, M)^\Gamma \otimes \zeta_k.$$

4.3 Vecteurs U -finis

On suppose pour le reste de ce chapitre que $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ et que tous les facteurs de Jordan–Hölder de D sont de dimension au moins 2. On note $\Pi = \Pi_\delta(D)$, qui est isomorphe comme B -module topologique à \tilde{D}/\tilde{D}^+ (proposition 4.1). On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que $P = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION 4.3. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$\Pi^{U,k} = \bigcup_{n \geq 1} \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \right)^k$$

et on pose $\Pi^{U\text{-fini}} = \bigcup_{k \geq 1} \Pi^{U,k}$.

LEMME 4.4. L'espace $\Pi^{U,k}$ est l'ensemble des vecteurs $v \in \Pi$ tels que l'application $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$ soit localement polynomiale de degré plus petit ou égal à $k - 1$.

Démonstration. Si $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \geq 1$, soit $f_{n,a}(x) = \begin{pmatrix} 1 & a+p^n x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$. Alors $f_{n,a} : \mathbf{Z}_p \rightarrow \Pi$ est une application continue dont le k -ième coefficient de Mahler est

$$a_k(f_{n,a}) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \right)^k v.$$

Le résultat découle alors du théorème de Mahler. □

LEMME 4.5. Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et $v \in \Pi$. Alors $v \in \Pi^{U,k}$ si et seulement si tout relèvement $z \in \tilde{D}$ de v appartient à $(1/\varphi^n(T)^k)\tilde{D}^+$ pour un certain $n \geq 1$. De plus, $\Pi^{U,k}$ est stable sous l'action du Borel B .

Démonstration. C'est une simple traduction de l'action de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur \tilde{D} et de l'isomorphisme B -équivariant $\Pi \simeq \tilde{D}/\tilde{D}^+$. La seconde assertion découle de la première et du fait que $\bigcup_{n \geq 1} (1/\varphi^n(T)^k)\tilde{D}^+$ est un $(\tilde{\mathbf{B}}^+)^H$ -module stable sous l'action de Γ et $\varphi^{\pm 1}$. □

Soit $v \in \Pi^{U\text{-fini}}$ et soit \tilde{z} un relèvement de v à \tilde{D} . En posant

$$\tilde{M} = \bigcup_{n,k \geq 1} \frac{1}{\varphi^n(T)^k} \tilde{D}^+,$$

on a $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{z} \in \tilde{M}$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p^*$. De plus, l'inclusion $\tilde{\mathbf{B}}^+ \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ fournit une injection de \tilde{D}^+ dans \tilde{D}_{dif}^+ et de \tilde{M} dans \tilde{D}_{dif} . On définit une fonction

$$\phi_v : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \tilde{D}_{\text{dif}}/\tilde{D}_{\text{dif}}^+, \quad \phi_v(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{z} \pmod{\tilde{D}_{\text{dif}}^+}.$$

Cette fonction est bien définie, car tout autre relèvement de v à \tilde{D} diffère de \tilde{z} par un élément de $\tilde{D}^+ \subset \tilde{D}_{\text{dif}}^+$.

PROPOSITION 4.6. L'espace $\Pi^{U\text{-fini}}$ est stable sous l'action de B et l'application $v \rightarrow \phi_v$ est une injection B -équivariante $\Pi^{U\text{-fini}} \rightarrow \text{LP}(\mathbf{Q}_p^*, \tilde{D}_{\text{dif}}/\tilde{D}_{\text{dif}}^+)^\Gamma$.

Démonstration. La stabilité sous l'action de B découle du lemme 4.5. Soit $\tilde{z} \in (1/\varphi^n(T)^k)\tilde{D}^+$ un relèvement de $v \in \Pi^{U\text{-fini}}$. Le (a) du lemme 2.4 montre que $\phi_v(p^{-m}) = 0$ pour tout $m > n$, et donc ϕ_v est à support compact dans \mathbf{Q}_p . Il est clair que $\phi_v(ax) = \sigma_a(\phi_v(x))$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Si $\phi_v = 0$, alors $\varphi^m(\tilde{z}) \in \tilde{D}_{\text{dif}}^+$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$. Ainsi, $\tilde{x} = \varphi^n(T)^k \cdot \tilde{z} \in \tilde{D}^+$ satisfait $\varphi^m(\varphi^{-n}(\tilde{x})) \in \varphi^m(T)^k \tilde{D}_{\text{dif}}^+ \subset t^k \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V(D)$ pour tout $m \geq 0$, et le (b) du lemme 2.4 permet de conclure que $\varphi^{-n}(\tilde{x}) \in T^k \tilde{D}^+$, donc $\tilde{z} \in \tilde{D}^+$ et $v = 0$. La B -équivariance est une simple traduction de l'action de B sur \tilde{D} , ce qui permet de conclure. \square

4.4 Vecteurs P -finis

DÉFINITION 4.7. On note $\mathcal{T}_n = \sum_{i=0}^{p^n-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{End}(\Pi)$ et on note

$$\Pi_c^{U\text{-fini}} = \bigcup_{n,k \geq 1} \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \text{Ker} \left(\mathcal{T}_n^k \circ \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

PROPOSITION 4.8. On a

$$\Pi_c^{U\text{-fini}} = \{v \in \Pi^{U\text{-fini}} \mid \phi_v \in \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, \tilde{D}_{\text{dif}}/\tilde{D}_{\text{dif}}^+)^{\Gamma}\}$$

et $\Pi_c^{U\text{-fini}}$ est stable sous l'action de B .

Démonstration. Supposons que $v \in \Pi_c^{U\text{-fini}}$ et soit $\tilde{z} \in \tilde{D}$ un relèvement de v . La condition $\mathcal{T}_n^k \circ \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = 0$ est équivalente à $(\varphi^n(T)/T)^k \varphi^m(\tilde{z}) \in \tilde{D}^+$, ou encore à

$$\tilde{z} \in \left(\frac{\varphi^{-m}(T)}{\varphi^{n-m}(T)} \right)^k \tilde{D}^+.$$

Ceci entraîne d'une part que $v \in \Pi^{U\text{-fini}}$ (lemme 4.5) et d'autre part que $\varphi^j(\tilde{z}) \in \tilde{D}_{\text{dif}}^+$ pour tout $j \geq m$ (lemme 2.4), donc $\phi_v(p^j) = 0$ pour tout $j \geq m$. Puisque $\phi_v(ax) = \sigma_a(\phi_v(x))$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on conclut que ϕ_v est nulle sur $p^m \mathbf{Z}_p - \{0\}$, donc $\phi_v \in \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, \tilde{D}_{\text{dif}}/\tilde{D}_{\text{dif}}^+)^{\Gamma}$.

Pour la réciproque, supposons que $v \in \Pi^{U,k}$ et qu'il existe $m \geq 1$ tel que ϕ_v s'annule sur $p^m \mathbf{Z}_p - \{0\}$. Soit $\tilde{z} = \tilde{x}/\varphi^n(T)^k$ un relèvement de v , avec $\tilde{x} \in \tilde{D}^+$ (lemme 4.5). Puisque $\phi_v(p^{j+m}) = 0$ pour tout $j \geq 0$, on a $\varphi^{m+j}(\tilde{z}) \in \tilde{D}_{\text{dif}}^+$, donc $\varphi^j(\varphi^m(\tilde{x})) \in t^k \tilde{D}_{\text{dif}}^+$ pour tout $j \geq 0$. On déduit du lemme 2.4 que $\varphi^m(\tilde{x}) \in T^k \tilde{D}^+$ et donc $\varphi^m(\tilde{z}) \in (T/\varphi^{m+n}(T))^k \tilde{D}^+$. Mais cela est équivalent à $\mathcal{T}_{m+n}^k \circ \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = 0$, ce qui montre que $v \in \Pi_c^{U\text{-fini}}$ et finit la preuve de la première assertion. La seconde s'en déduit, en utilisant la proposition 4.6. \square

LEMME 4.9. Si $u \in U$ et $v \in \Pi^{U,k}$, alors $(u - 1)^k v \in \Pi_c^{U\text{-fini}}$.

Démonstration. En écrivant $u = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\phi_{(u-1)^k v}(p^j) = ([(1 + T)^{p^j x}] - 1)^k \phi_v(p^j)$$

pour tout $j \in \mathbf{Z}$. Comme $v \in \Pi^{U,k}$, on a $\phi_v(p^j) \in t^{-k} \tilde{D}_{\text{dif}}^+ / \tilde{D}_{\text{dif}}^+$ pour tout j . Puisque

$$([(1 + T)^a] - 1)^k \in t^k \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$$

pour $a \in \mathbf{Z}_p$, on en déduit que pour tout $j \geq -v_p(x)$ $\phi_{(u-1)^k v}(p^j) = 0$ et on conclut en utilisant la proposition ci-dessus. \square

DÉFINITION 4.10. On note $\Pi_c^{P\text{-fini}}$ le sous-espace de $\Pi_c^{U\text{-fini}}$ formé des v tels que $L\left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]v$ soit de dimension finie sur L .

Nous allons décrire l'espace $\Pi_c^{P\text{-fini}}$ de manière explicite, en utilisant la théorie de Hodge p -adique. Soit $D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+$ la limite inductive (c'est aussi la réunion croissante) des $D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+$. C'est naturellement un sous $L_\infty[[t]]$ -module de $\tilde{D}_{\text{dif}}/\tilde{D}_{\text{dif}}^+$.

PROPOSITION 4.11. *L'application $v \rightarrow \phi_v$ induit un isomorphisme de B -modules*

$$\Pi_c^{P\text{-fini}} \simeq \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^{\Gamma}.$$

Démonstration. Si M est un $L[\Gamma]$ -module, on note $M^{\Gamma\text{-fini}}$ l'ensemble des $x \in M$ tels que $L[\Gamma]x$ soit de dimension finie sur L . Si $v \in \Pi_c^{P\text{-fini}}$, alors $L\left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]v$ est de dimension finie sur L , donc il en est de même de $L\left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\phi_v$. Comme ϕ est Γ -invariante, on obtient $\phi_v(x) \in (\tilde{D}_{\text{dif}}/\tilde{D}_{\text{dif}}^+)^{\Gamma\text{-fini}}$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p^*$. Le lemme 4.12 ci-dessous permet de conclure que $v \rightarrow \phi_v$ induit une injection B -équivariante de $\Pi_c^{P\text{-fini}}$ dans $\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^{\Gamma}$.

LEMME 4.12. *Pour tout $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ on a*

$$(\tilde{D}_{\text{dif}}/\tilde{D}_{\text{dif}}^+)^{\Gamma\text{-fini}} = D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+.$$

Démonstration. Soit $V = V(D)$ et notons, pour simplifier, $X = \tilde{D}_{\text{dif}}^+$ et $Y = D_{\text{dif},\infty}^+$. La suite exacte

$$0 \rightarrow t\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \rightarrow 0$$

et la nullité de $H^1(H, t\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ (qui découle de [Col98, théorème IV.3.1]) montrent que $X/tX \simeq (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^H$. Par définition, on a $Y/tY = D_{\text{Sen}} = \bigcup_{n \geq 1} D_{\text{Sen},n}$, donc d'après Sen [Sen81] on a $(X/tX)^{\Gamma\text{-fini}} = Y/tY$. Comme t est vecteur propre pour Γ , on a aussi $(t^{-1}X/X)^{\Gamma\text{-fini}} = t^{-1}Y/Y$. En utilisant les suites exactes (dont les applications-induites par la multiplication par t^{k-1} sont Γ -équivariantes, à des éléments de \mathbf{Z}_p^* près)

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow t^{-k+1}X/X \rightarrow t^{-k}X/X \rightarrow t^{-1}X/X \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow t^{-k+1}Y/Y \rightarrow t^{-k}Y/Y \rightarrow t^{-1}Y/Y \rightarrow 0, \end{aligned}$$

on obtient par récurrence sur $k \geq 1$ que $(t^{-k}X/X)^{\Gamma\text{-fini}} = t^{-k}Y/Y$. Le résultat se déduit en passant à la limite inductive sur k . □

Il nous reste à prouver la surjectivité de $\Pi_c^{P\text{-fini}} \rightarrow \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^{\Gamma}$. La preuve est très semblable à celle de [Dos12a, proposition 12]. En utilisant la remarque 4.2 et en raisonnant comme dans le premier paragraphe de la preuve de [Dos12a], on se ramène à montrer que pour tout $x \in D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+$ on peut trouver $v \in \Pi_c^{P\text{-fini}}$ tel que¹⁶ $\phi_v(p^i) = 1_{i=0}x$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Soient $k \geq 1$ et $n \geq m(D)$ tels que $x \in t^{-k}D_{\text{dif},n}^+/D_{\text{dif},n}^+$, et soit $\hat{x} \in t^{-k}D_{\text{dif},n}^+$ un relèvement de x . Soit $\omega = T/\varphi^{-1}(T) \in \tilde{\mathbf{A}}^+$. Puisque $\omega^k \hat{x} \in \tilde{D}_{\text{dif}}^+$, le lemme 6 de [Dos12a] fournit $y \in \tilde{D}^+$ tel que $y - \omega^k \hat{x} \in \omega^k \tilde{D}_{\text{dif}}^+$. Soit v l'image de $\omega^{-k}y \in \tilde{D}$ dans $\Pi \simeq \tilde{D}/\tilde{D}^+$. Le lemme 2.4 et le choix de y montrent que $\phi_v(p^i) = 1_{i=0}x$ pour tout i . Comme $T^k \omega^{-k} \in \tilde{\mathbf{A}}^+$, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1\right)^k$ tue v , donc $v \in \Pi^{U\text{-fini}}$. Comme x est Γ -fini (lemme 4.12) et $\phi_v(p^i) = 1_{i=0}x$, on obtient que v est Γ -fini, donc $v \in \Pi^{P\text{-fini}}$, ce qui permet de conclure. □

¹⁶ Le nombre $1_{i=0}$ est égal à 1 si $i = 0$ et à 0 sinon.

COROLLAIRE 4.13. L'espace $\Pi_c^{P\text{-fini}}$ est stable sous l'action de B et l'application $v \rightarrow (\phi_v(p^i))_{i \in \mathbf{Z}}$ induit une bijection

$$\Pi_c^{P\text{-fini}} \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} D_{\text{dif}, \infty} / D_{\text{dif}, \infty}^+$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente, de la remarque 4.2 et du fait que $D_{\text{dif}, \infty} / D_{\text{dif}, \infty}^+$ est un sous $L_\infty[[t]]$ -module de $\tilde{D}_{\text{dif}} / \tilde{D}_{\text{dif}}^+$, stable sous l'action de Γ . □

4.5 L'espace $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$

On suppose dans ce § que les poids de Hodge–Tate généralisés de D sont ≤ 1 et on fixe $k \in \mathbf{N}^*$.

DÉFINITION 4.14. (a) On note $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$ le sous-espace de $\Pi_c^{P\text{-fini}}$ formé des vecteurs v tels que $\mu_{n,k}(v) = 0$ pour tout n assez grand, où

$$\mu_{n,k} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(\begin{pmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (1+p^n)^{i+1-k} \right) \in \mathbf{Z}_p \left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

(b) On note $(D_{\text{dif}, \infty} / D_{\text{dif}, \infty}^+)^{k, \text{alg}}$ la réunion des sous-modules $(D_{\text{dif}, n} / D_{\text{dif}, n}^+)^{\mu_{n,k}=0}$ de $D_{\text{dif}, \infty} / D_{\text{dif}, \infty}^+$, où

$$\mu_{n,k} = \prod_{i=0}^{k-1} (\sigma_{1+p^n} - (1+p^n)^{i+1-k}) \in \mathbf{Z}_p[\Gamma].$$

Remarque 4.15. (a) On se permet de noter deux objets différents par $\mu_{n,k}$, puisque l'action de $\begin{pmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est induite par celle de σ_{1+p^n} . Comme ces opérateurs agissent sur des espaces différents, cela ne crée aucun risque de confusion.

(b) On vérifie sans mal que $\mu_{n,k}$ divise $\mu_{n+1,k}$ dans $O_L \left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$. On en déduit que la suite des sous-modules $(\Pi_c^{P\text{-fini}})^{\mu_{n,k}=0}$ de $\Pi_c^{P\text{-fini}}$ est croissante. Le même argument montre que la suite des sous-modules $(D_{\text{dif}, n} / D_{\text{dif}, n}^+)^{\mu_{n,k}=0}$ de $D_{\text{dif}, \infty} / D_{\text{dif}, \infty}^+$ est croissante.

(c) Le lemme des noyaux fournit une décomposition

$$(D_{\text{dif}, n} / D_{\text{dif}, n}^+)^{\mu_{n,k}=0} = \bigoplus_{i=0}^{k-1} (D_{\text{dif}, n} / D_{\text{dif}, n}^+)^{\sigma_{1+p^n} = (1+p^n)^{i+1-k}}.$$

LEMME 4.16. (a) Si $0 \leq i < k$, alors t^{k-i} tue $(D_{\text{dif}, n} / D_{\text{dif}, n}^+)^{\sigma_{1+p^n} = (1+p^n)^{i+1-k}}$ pour $n \geq m(D)$.

(b) t^k tue $(D_{\text{dif}, n} / D_{\text{dif}, n}^+)^{\mu_{n,k}=0}$ pour $n \geq m(D)$.

Démonstration. Le point (b) découle de (a) et du point (c) de la remarque 4.15. Passons au (a) et considérons $z \in D_{\text{dif}, n}$ tel que $(\sigma_{1+p^n} - (1+p^n)^{i+1-k})z \in D_{\text{dif}, n}^+$. Il faut montrer que $t^{k-i}z \in D_{\text{dif}, n}^+$. Si ce n'est pas le cas, alors on peut écrire $z = x/t^N$, avec $x \in D_{\text{dif}, n}^+ \setminus tD_{\text{dif}, n}^+$ et $N > k - i$. Comme $(\sigma_{1+p^n} - (1+p^n)^{i+1-k})z \in D_{\text{dif}, n}^+$, on obtient en particulier $\sigma_{1+p^n}(x) - (1+p^n)^{i+1-k+N}x \in tD_{\text{dif}, n}^+$, donc l'image \bar{x} de x dans $D_{\text{Sen}, n}$ est un vecteur propre de $\Theta_{\text{Sen}, D}$, de valeur propre $i+1-k+N \geq 2$. Cela contredit notre hypothèse que les poids de Hodge–Tate généralisés de D sont ≤ 1 . □

PROPOSITION 4.17. L'espace $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$ est stable sous l'action de B et l'application $v \rightarrow \phi_v$ induit un isomorphisme B -équivariant

$$\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}} \simeq \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, (D_{\text{dif}, \infty} / D_{\text{dif}, \infty}^+)^{k, \text{alg}})^\Gamma.$$

Démonstration. On déduit formellement de la proposition 4.11 et du (b) de la remarque 4.15 que $v \rightarrow \phi_v$ induit un isomorphisme L -linéaire

$$\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}} \simeq \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, (D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^{k,\text{alg}})^\Gamma.$$

Pour démontrer que $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$ est stable par B et conclure la preuve de la proposition, il suffit de montrer que $(D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^{k,\text{alg}}$ est un sous $L_\infty[[t]]$ -module de $D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+$, stable par Γ . La stabilité par Γ est claire, puisque Γ commute à $\mu_{n,k}$. Pour montrer que $(D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^{k,\text{alg}}$ est un $L_\infty[[t]]$ -module, nous avons besoin de quelques préliminaires.

LEMME 4.18. *Si $0 \leq i < k$ et $z \in D_{\text{dif},n}$ satisfait $(\sigma_{1+p^n} - (1 + p^n)^{i+1-k})z \in D_{\text{dif},n}^+$, alors $\mu_{n,k}(fz) \in D_{\text{dif},n}^+$ pour tout $f \in L_n[[t]]$.*

Démonstration. Notons pour simplifier $a = 1 + p^n$. La congruence $\sigma_a(z) \equiv a^{i+1-k}z \pmod{D_{\text{dif},n}^+}$ entraîne

$$\mu_{n,k}(fz) \equiv \prod_{j=0}^{k-1} (a^{i+1-k}\sigma_a - a^{j+1-k})f \cdot z \pmod{D_{\text{dif},n}^+}.$$

Ensuite, on vérifie sans mal que

$$\prod_{j=0}^{k-1} (a^{i+1-k}\sigma_a - a^{j+1-k})f \in t^{k-i}L_n[[t]],$$

et le résultat suit du lemme 4.16. □

Revenons à la preuve du fait que $(D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^{k,\text{alg}}$ est un sous $L_\infty[[t]]$ -module de $D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+$. Le lemme 4.18 montre que $(D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0}$ est un $L_n[[t]]$ -module. Le résultat s'ensuit, en passant à la limite et en utilisant le lemme 4.16 et le fait que $L_\infty[[t]]/t^k$ est la réunion des $L_n[[t]]/t^k$. □

COROLLAIRE 4.19. *L'application $v \rightarrow (\phi_v(p^i))_{i \in \mathbf{Z}}$ induit un isomorphisme de L -espaces vectoriels*

$$\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}} \simeq \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} (D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^{k,\text{alg}}.$$

LEMME 4.20. *Pour tout $v \in \Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$ on a $((\binom{1 \ p^n}{0 \ 1}) - 1)^k v = 0$ pour tout n assez grand.*

Démonstration. Soient $i \leq j \in \mathbf{Z}$ tels que $\phi_v(p^m) = 0$ pour $m \notin [i, j]$. Si $n \geq -i$ et $m \in [i, j]$, alors $([(1+T)^{p^{n+m}}] - 1)^k = \varphi^{m+n}(T)^k \in t^k L_n[[t]]$. Puisque $\phi_v(p^m)$ est tué par t^k par le lemme 4.16 et la proposition 4.17, on obtient $([(1+T)^{p^{n+m}}] - 1)^k \phi_v(p^m) = 0$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$ et $n \geq -i$, d'où le résultat. □

5. Le théorème de dualité de Colmez

Dans ce chapitre on étend (avec une preuve différente) un résultat de dualité de Colmez. Ce résultat fait le lien entre les deux chapitres précédents et il est au coeur de la preuve du théorème 1.1. On utilise enfin ce théorème de Colmez pour démontrer un résultat de densité des vecteurs analytiques P -finis.

5.1 Traces de Tate normalisées

Nous avons défini dans le §4.1 des traces de Tate normalisées $T_n : \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}$ pour tout $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ et tout $n \geq 0$. En général, il n'est pas vrai que $T_n(\tilde{D}^+) \subset \tilde{D}^+$, mais c'est le cas [Col08, proposition 8.5] si $D = \mathcal{E}$ est le (φ, Γ) -module trivial. On obtient ainsi des applications \mathbf{Q}_p -linéaires $T_n : \tilde{\mathbf{B}}^H \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^H$ et $T_n : (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H \rightarrow (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H$. Le résultat suivant fait l'objet de [Col98, proposition V.4.5].

PROPOSITION 5.1. *Soit $n \geq 1$. L'application $T_n : (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H \rightarrow (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H$ se prolonge par continuité en une application $F_n[[t]]$ -linéaire $T_n : (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H \rightarrow F_n[[t]] \subset (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H$.*

On définit alors $T_{0,\text{dR}} : \mathbf{B}_{\text{dR}}^H \rightarrow \mathbf{Q}_p((t)) \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}^H$ par

$$T_{0,\text{dR}} = \frac{1}{p} \text{Tr}_{F_1((t))/\mathbf{Q}_p((t))} \circ T_1,$$

T_1 étant l'unique extension $F_1((t))$ -linéaire de l'application fournie par la proposition 5.1. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$T_{0,\text{dR}}|_{F_n((t))} = \frac{1}{p^n} \text{Tr}_{F_n((t))/\mathbf{Q}_p((t))}.$$

5.2 Comparaison de deux accouplements

Soit $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ et soit $V = V(D)$. L'accouplement $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ -équivariant parfait $V^*(1) \times V \rightarrow L(1)$ induit un accouplement $\tilde{\mathbf{B}}^H \otimes_{\mathbf{Q}_p} L$ -bilinéaire, Γ -équivariant

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \tilde{D} \times \tilde{D} = (\tilde{\mathbf{B}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^*(1))^H \times (\tilde{\mathbf{B}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^H \rightarrow (\tilde{\mathbf{B}}^H \otimes_{\mathbf{Q}_p} L)(1).$$

On note $dT/(1+T)$ la base canonique du Γ -module $\mathbf{Q}_p(1)$ et on fait agir φ sur $dT/(1+T)$ par $\varphi(dT/(1+T)) = dT/(1+T)$. On identifie $M(1)$ à $M(dT/(1+T))$ pour tout Γ -module M . Par définition, l'image de l'application $T_0 : \tilde{\mathbf{B}}^H \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^H$ (voir le §5.1) est contenue dans \mathcal{E} , d'où une application Γ -équivariante

$$T_0 = (T_0 \otimes \text{id})(1) : (\tilde{\mathbf{B}}^H \otimes_{\mathbf{Q}_p} L)(1) \rightarrow \mathcal{E} \frac{dT}{1+T}.$$

On définit un accouplement entre \tilde{D} et \tilde{D} par

$$\{ \cdot, \cdot \} : \tilde{D} \times \tilde{D} \rightarrow L, \quad \{ \tilde{z}, z \} = \text{res}_0(T_0(\langle \sigma_{-1}(\tilde{z}), z \rangle)),$$

avec la notation habituelle $\text{res}_0(f) = a_{-1}$ si $f = (\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n) dT$. Il découle de [Col10a, proposition I.2.2] que cet accouplement est φ et Γ invariant (sa restriction à $\tilde{D} \times D$ est celle utilisée dans [Col10b]).

L'accouplement $V^*(1) \times V \rightarrow L(1)$ induit aussi un accouplement Γ -équivariant parfait

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \tilde{D}_{\text{dif}} \times \tilde{D}_{\text{dif}} \rightarrow (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\text{dR}}^H)(1) = (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\text{dR}}^H) dt,$$

dt étant¹⁷ une base de $\mathbf{Q}_p(1)$. Cet accouplement envoie $\tilde{D}_{\text{dif}}^+ \times \tilde{D}_{\text{dif}}^+$ dans $(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H) dt$. On définit alors un accouplement $\{ \cdot, \cdot \}_{\text{dif}} : \tilde{D}_{\text{dif}} \times \tilde{D}_{\text{dif}} \rightarrow L$ en posant

$$\{ \tilde{z}, z \}_{\text{dif}} = \text{res}_0(T_{0,\text{dR}}(\langle \sigma_{-1}(\tilde{z}), z \rangle)).$$

¹⁷ Comme $t = \log(1+T)$, on a bien $dt = dT/(1+T)$, compatible avec l'action de Γ .

PROPOSITION 5.2. Soient $n, k \in \mathbf{N}^*$, $a \in \mathbf{Z}$ et $\tilde{z} \in \tilde{D}^+$, $z \in (\varphi^a(T)/\varphi^n(T))^k \tilde{D}^+$. Alors

$$\{\tilde{z}, z\} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \{\varphi^{-j}(\tilde{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\text{dif}},$$

la somme n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Démonstration. On peut supposer¹⁸ que $a = 0$. Posons $\langle \sigma_{-1}(\tilde{z}), z \rangle = f(dT/(1 + T))$, avec $f \in (T/\varphi^n(T))^k (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H)$. Alors

$$\langle \sigma_{-1}(\varphi^{-j}(\tilde{z})), \varphi^{-j}(z) \rangle = \varphi^{-j}(f) dt \in (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\text{dR}}^H) dt$$

et $\varphi^{-j}(f) \in (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^H$ pour $j \notin [1, n]$ (lemme 2.4), ce qui fait que seuls les termes d'indice $j \in [1, n]$ dans la somme sont non nuls. Dans la suite on fixe un tel j .

Notons $g = T_0(f) \in (T/\varphi^n(T))^k \mathcal{E}^+$, de telle sorte que $\{\tilde{z}, z\} = \text{res}_0(g(dT/(1 + T)))$. Puisque $j \geq 1$, on a $T_1 \circ T_j = T_1$ et $\varphi^j \circ T_j = T_0 \circ \varphi^j$, donc $\varphi^{-j} \circ T_0 = T_j \circ \varphi^{-j}$. On en déduit que

$$T_1(\varphi^{-j}(g)) = T_1(\varphi^{-j}(T_0(f))) = T_1 \circ T_j(\varphi^{-j}(f)) = T_1(\varphi^{-j}(f)),$$

donc $T_{0,\text{dR}}(\varphi^{-j}(g)) = T_{0,\text{dR}}(\varphi^{-j}(f))$ et

$$\{\varphi^{-j}(\tilde{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\text{dif}} = \text{res}_0(T_{0,\text{dR}}(\varphi^{-j}(g)) dt).$$

Si A_j est l'ensemble des racines primitives d'ordre p^j de l'unité, alors

$$T_{0,\text{dR}}(\varphi^{-j}(g)) = \frac{1}{p^j} \text{Tr}_{L_j((t))/L((t))}(g(\varepsilon^{(j)} e^{t/p^j} - 1)) = \frac{1}{p^j} \sum_{\zeta \in A_j} g(\zeta e^{t/p^j} - 1)$$

et, en faisant la substitution $t \rightarrow p^{j-n}t$, on obtient finalement

$$\{\varphi^{-j}(\tilde{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\text{dif}} = \frac{1}{p^n} \sum_{\zeta \in A_j} \text{res}_0(g(\zeta e^{t/p^n} - 1) dt),$$

ce qui permet de conclure que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \{\varphi^{-j}(\tilde{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\text{dif}} &= \frac{1}{p^n} \sum_{\zeta \in \mu_{p^n}} \text{res}_0(g(\zeta e^{t/p^n} - 1) dt) \\ &= \text{res}_0\left(\frac{1}{p^n} \sum_{\zeta \in \mu_{p^n}} g(\zeta e^{t/p^n} - 1) dt\right) \\ &= \text{res}_0(\psi^n(g)(e^t - 1) dt) \\ &= \text{res}_0\left(\psi^n(g) \frac{dT}{1 + T}\right) \\ &= \text{res}_0\left(g \frac{dT}{1 + T}\right) = \{\tilde{z}, z\}. \end{aligned}$$

Les dernières égalités utilisent le changement de variable $T = e^t - 1$ et l'égalité [Col10a, proposition I.2.2] $\text{res}_0(f(dT/(1 + T))) = \text{res}_0(\psi(f)(dT/(1 + T)))$ pour tout $f \in \mathcal{R}$. \square

¹⁸ Si $a \neq 0$, remplacer z et \tilde{z} par $\varphi^{-a}(z)$ et $\varphi^{-a}(\tilde{z})$, ainsi que n par $\max(1, n - a)$; l'égalité à démontrer est la même, car $\{, \}$ est φ -invariant.

5.3 Un résultat de dualité

Le théorème 5.3 ci-dessous étend et raffine [Col10b, proposition VI.5.12], avec une preuve différente de celle de [Col10b]. Son énoncé demande pas mal de préliminaires. Rappelons (voir la section 5.2) que l'on dispose d'un accouplement $\{, \}_{\text{dif}}$. Il induit un accouplement Γ -invariant parfait entre $\check{D}_{\text{dif},n}$ et $D_{\text{dif},n}$, $\check{D}_{\text{dif},n}^+$ et $D_{\text{dif},n}^+$ étant exactement orthogonaux pour n assez grand [Col10b, lemme VI.3.3], d'où un accouplement $\{, \}_{\text{dif}}$ entre $\check{D}_{\text{dif},n}^+$ et $D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+$.

On fixe $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ et on pose $\Pi = \Pi_\delta(D)$. On suppose que les facteurs de Jordan–Hölder de D sont tous de dimension au moins 2, de telle sorte que les résultats du § 4.4 s'appliquent à l'espace $\Pi^{P\text{-fini}}$. D'après le corollaire VI.13 de [CD14], il existe $m(D)$ assez grand tel que $(\Pi^{\text{an}})^* \subset \check{D}^{[0, r_{m(D)}]} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Quitte à augmenter $m(D)$, on peut supposer que le morphisme $\varphi^{-n} = \check{D}^{[0, r_n]} \rightarrow \check{D}_{\text{dif}}^+$ de localisation en $\varepsilon^{(n)} - 1$ est défini pour $n \geq m(D)$ (voir le § 2.4). On peut donc définir pour $\check{z} \in (\Pi^{\text{an}})^*$, $n \geq m(D)$ et $j \in \mathbf{Z}$

$$i_{j,n}(\check{z}) = \varphi^{-n} \left(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^{n-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \check{z} \right) \right) \in \check{D}_{\text{dif},n}^+.$$

On note $\{, \}_{\mathbf{P}^1}$ l'accouplement naturel entre Π^* (dual topologique de Π) et Π , ainsi qu'entre $(\Pi^{\text{an}})^*$ et Π^{an} . Il est en fait induit par un accouplement G -équivariant parfait $\{, \}_{\mathbf{P}^1}$ entre $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ (respectivement entre $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$) (voir le § III.6 de [CD14] pour ces accouplements).

THÉORÈME 5.3. *Soit $v \in \Pi_c^{P\text{-fini}}$ et soit $n \geq m(D)$ tel que $\phi_v(p^j) \in D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$. Alors $v \in \Pi^{\text{an}}$ et pour tout $\check{z} \in (\Pi^{\text{an}})^*$ on a*

$$\{\check{z}, v\}_{\mathbf{P}^1} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \{i_{j,n}(\check{z}), \phi_v(p^{-j})\}_{\text{dif}}.$$

Démonstration. Notons déjà qu'un tel n existe bien (corollaire 4.13). Soit $F(\check{z})$ la somme dans le terme de droite. Puisque ϕ_v est à support compact dans \mathbf{Q}_p^* , il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans cette somme (et cela uniformément en \check{z}). Comme $z \rightarrow i_{j,n}(z)$ sont continues (car $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ et φ^{-n} le sont), on en déduit que F définit une forme linéaire continue sur $(\Pi^{\text{an}})^*$. Mais Π^{an} est réflexif (c'est un espace de type compact), donc il existe $v_1 \in \Pi^{\text{an}}$ tel que $F(\check{z}) = \{\check{z}, v_1\}_{\mathbf{P}^1}$ pour tout $\check{z} \in (\Pi^{\text{an}})^*$. On va montrer que $v_1 = v$, ce qui permettra de conclure. Rappelons que l'on dispose d'une inclusion $\iota : \check{D}^+ \rightarrow \Pi^*$. Son image est dense d'après le corollaire III.22 de [CD14], donc (par le théorème de Hahn–Banach) il suffit de montrer que $F(\iota(\check{z})) = \{\iota(\check{z}), v\}_{\mathbf{P}^1}$ pour tout $\check{z} \in \check{D}^+$.

Fixons donc $\check{z} \in \check{D}^+$. On a $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iota(\check{z}) \right) = \varphi^n(T_n(\check{z}))$ par définition de l'application ι , et en appliquant φ^{-n} on obtient

$$i_{0,n}(\iota(\check{z})) = T_n(\check{z}) \in \check{D}_{\text{dif},n}^+.$$

Puisque $\phi_v(p^{-j}) \in D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+$, un retour à la définition de $\{, \}_{\text{dif}}$ combiné avec l'égalité ci-dessus montrent que

$$\{i_{j,n}(\iota(\check{z})), \phi_v(p^{-j})\}_{\text{dif}} = \{T_n(\varphi^{-j}(\check{z})), \phi_v(p^{-j})\}_{\text{dif}} = \{\varphi^{-j}(\check{z}), \phi_v(p^{-j})\}_{\text{dif}}.$$

Comme $v \in \Pi_c^{P\text{-fini}}$, la preuve de la proposition 4.8 montre l'existence d'entiers a, m, k tels que v ait un relèvement z à $(\varphi^a(T)/\varphi^m(T))^k \check{D}^+$. Comme $\varphi^{-j}(z) - \phi_v(p^{-j}) \in \check{D}_{\text{dif}}^+$, on a $\{\varphi^{-j}(\check{z}), \phi_v(p^{-j})\}_{\text{dif}} = \{\varphi^{-j}(\check{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\text{dif}}$. Le théorème est donc une conséquence de la proposition 5.2. □

COROLLAIRE 5.4. Soit $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ tel que les facteurs de Jordan–Hölder de D soient de dimension ≥ 2 , et les poids de Hodge–Tate de D soient ≤ 1 . On suppose que $w(\delta) = 1 - k$ et on pose $\Pi = \Pi_\delta(D)$. Alors $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$ est un sous-espace de Π^{an} tué par $(u^+)^k$ et par $\prod_{i=0}^{k-1} (h - 2i + k - 1)$.

Démonstration. Le fait que $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$ est un sous-espace de Π^{an} tué par $(u^+)^k$ découle du théorème 5.3 et du lemme 4.20. Pour vérifier la dernière assertion, notons $a^+ \in \mathfrak{gl}_2$ l'action infinitésimale de $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme Π a pour caractère central δ et $w(\delta) = 1 - k$, on a $a^+ = (h + 1 - k)/2$ sur Π^{an} . Par définition de $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$, chacun de ses vecteurs est tué par $\prod_{i=0}^{k-1} (a^+ - (i + 1 - k))$. Le résultat s'en déduit. \square

Nous terminons ce § par un calcul qui nous sera utile plus loin.

LEMME 5.5. Soient $\mathcal{D} \in \mathcal{C}_L(\delta)$ et $k \in \mathbf{N}^*$ tels que $u^-(\check{z}) = \nabla(k - \nabla)(\check{z})/t$ pour tout $\check{z} \in \check{\mathcal{D}}_{\text{rig}}$. Alors

$$i_{j,n}((u^-)^k \check{z}) = (-p^j)^k \frac{\nabla_{2k}(i_{j,n}(\check{z}))}{t^k}$$

pour tous $\check{z} \in (\Pi_\delta(\mathcal{D})^{\text{an}})^*$, $n \geq m(\mathcal{D})$ et $j \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. On fixe $n \geq m(\mathcal{D})$, $j \in \mathbf{Z}$ et $\check{z} \in (\Pi_\delta(\mathcal{D})^{\text{an}})^*$, et on pose

$$x = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^{n-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \check{z} \right) \in \check{\mathcal{D}}_{\text{rig}},$$

de telle sorte que $i_{j,n}(\check{z}) = \varphi^{-n}(x)$. Un petit calcul montre que l'on a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ u^- = \frac{1}{a} u^- \circ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} i_{j,n}((u^-)^k \check{z}) &= \varphi^{-n} \left(p^{k(j-n)} \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left((u^-)^k \begin{pmatrix} p^{n-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \check{z} \right) \right) \\ &= p^{k(j-n)} \varphi^{-n}((u^-)^k(x)), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence du fait que u^- commute à $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ [CD14, proposition VI.8]. Le résultat découle alors du corollaire 3.4 et du fait que φ^{-n} commute à ∇ et envoie t sur t/p^n . \square

5.4 Un résultat de densité

Comme application du théorème 5.3, nous allons démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 5.6. Soit $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ dont tous les facteurs de Jordan–Hölder sont supersinguliers. Alors $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est un sous-espace dense de Π , contenu dans Π^{an} et stable sous l'action de B .

Démonstration. Soit D le dual de Cartier de $D(\Pi)$, de telle sorte que $\Pi \simeq \Pi_\delta(D) \simeq \tilde{D}/\tilde{D}^+$ (théorème 2.2 et proposition 4.1). Le fait que $\Pi_c^{P\text{-fni}}$ est contenu dans Π^{an} et est stable par B découle du théorème 5.3 et du corollaire 4.13. Il reste donc à prouver qu'il est dense dans Π . Supposons que ce n'est pas le cas, donc il existe $\check{z} \in \Pi^*$ tel que $\{\check{z}, v\}_{\mathbf{P}^1} = 0$ pour tout $v \in \Pi_c^{P\text{-fni}}$. On a une injection $\Pi^* \subset (\Pi^{\text{an}})^*$ déduite de la densité de Π^{an} dans Π [ST03]. Le théorème 5.3 et le corollaire 4.13 montrent que $i_{j,n}(\check{z})$ est orthogonal à $D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+$ pour $j \in \mathbf{Z}$ et $n \geq m(D)$. Puisque $\{, \}_{\text{dif}}$ induit un accouplement parfait entre $\check{D}_{\text{dif},n}^+$ et $D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+$, il

s'ensuit que $i_{j,n}(\check{z}) = 0$ pour $j \in \mathbf{Z}$ et $n \geq m(D)$. En revenant à la définition des applications $i_{j,n}$ et en utilisant l'injectivité de φ^{-n} , on obtient $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\check{z}) = 0$. La proposition III.23 de [CD14] montre que sous les hypothèses du théorème l'application $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est injective sur $\Pi^* \subset \check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, ce qui permet de conclure. \square

6. Etude du module $\check{E}_{\text{dif},n}^+$

Dans ce chapitre on fixe $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ de dimension 2, de de Rham, à poids de Hodge–Tate 1 et $1 - k$, avec $k \in \mathbf{N}^*$. On note $\delta = \chi^{-1} \det V(D)$, de telle sorte que $w(\delta) = 1 - k$. On fixe une extension non scindée $0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow 0$ telle que E soit de Hodge–Tate et $E \in \mathcal{C}_L(\delta)$. On décrit la structure du module $\check{E}_{\text{dif},n}^+$ et on introduit un certain nombre de modules qui permettent de contrôler $\Pi_\delta(E)^{\text{alg}}$. Pour simplifier, on note $R_n = L_n[[t]]$. Les entiers $m(E) \geq m(D)$ sont des constantes assez grandes, qui ne dépendent que de D et E .

6.1 Construction d'une base convenable

Puisque \check{D} est de de Rham à poids de Hodge–Tate 0 et k , les L -espaces vectoriels \check{D}_{dR}^+ et $\check{D}_{\text{dR}}/\check{D}_{\text{dR}}^+$ sont de dimension 1. On en déduit¹⁹ l'existence de $e_1, e_2 \in \check{D}_{\text{dif},m(D)}^+$ tels que

$$\sigma_a(e_1) = e_1, \quad \sigma_a(e_2) = a^k e_2, \quad \forall a \in \mathbf{Z}_p^*$$

et tels que $\check{D}_{\text{dif},n}^+$ soit un R_n -module libre de base e_1, e_2 pour tout $n \geq m(D)$.

PROPOSITION 6.1. *Il existe $f_1, f_2 \in \check{E}_{\text{dif},m(E)}^+$ tels que :*

- (a) $\check{E}_{\text{dif},n}^+$ est un R_n -module libre de base e_1, e_2, f_1, f_2 pour tout $n \geq m(E)$;
- (b) il existe $\alpha \in L$ tel que $\sigma_a(f_1) = f_1$ et $\sigma_a(f_2) = a^k f_2 + \alpha a^k \log a \cdot t^k e_1$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Démonstration. Pour simplifier, on note $m = m(E)$, $X = \check{E}_{\text{dif},m}^+$, $Y = \check{D}_{\text{dif},m}^+$, et enfin $a = 1 + p^m$. La suite exacte $0 \rightarrow D^{[0,r_m]} \rightarrow E^{[0,r_m]} \rightarrow D^{[0,r_m]} \rightarrow 0$ et la platitude de R_m sur $\mathcal{E}^{[0,r_m]}$ fournissent une suite exacte de R_m -modules $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$, compatible avec l'action de Γ .

Soient $f_1, f_2 \in X$ qui s'envoient sur e_1, e_2 , respectivement, de telle sorte que e_1, e_2, f_1, f_2 est une R_m -base de X . On a $\sigma_a(f_1) - f_1 \in Y$ et $\sigma_a(f_2) - a^k f_2 \in Y$. Si $A, B \in R_m$, un petit calcul montre que

$$(\sigma_a - 1)(f_1 + Ae_1 + Be_2) = (\sigma_a(f_1) - f_1) + (\sigma_a(A) - A)e_1 + (a^k \sigma_a(B) - B)e_2.$$

Mais $B \rightarrow a^k \sigma_a(B) - B$ est surjective sur R_m et $A \rightarrow \sigma_a(A) - A$ a pour image l'ensemble des éléments de R_m de terme constant nul (cela découle trivialement du fait que $\sigma_a(t) = at$). Ainsi, quitte à remplacer f_1 par $f_1 + Ae_1 + Be_2$ pour $A, B \in R_m$ convenables, on peut supposer que $\sigma_a(f_1) - f_1 = \alpha \cdot e_1$ pour un $\alpha \in L_m$. Alors $(\sigma_a - 1)^2(f_1) = 0$ et donc $\nabla^2(f_1) = 0$. On en déduit que l'image de f_1 dans X/tX est tuée par $\Theta_{\text{Sen},\check{E}}^2$ et donc aussi par $\Theta_{\text{Sen},\check{E}}$ (théorème 3.3). Ainsi, $\nabla(f_1) = (\alpha/\log a)e_1 \in tX$ et comme $e_1 \notin tX$, on en déduit que $\alpha = 0$ et donc $\sigma_a(f_1) = f_1$.

Pour f_2 , l'argument est similaire : quitte à modifier f_2 par un élément de Y , on peut supposer que

$$(\sigma_a - a^k)(f_2) = \alpha a^k \log a \cdot t^k e_1 + \beta e_2,$$

¹⁹ Choisir une base e_1 de \check{D}_{dR}^+ et un élément $x \in \check{D}_{\text{dR}}$ tel que l'image de x dans $\check{D}_{\text{dR}}/\check{D}_{\text{dR}}^+$ en soit une base, et poser $e_2 = t^k x$.

avec $\alpha, \beta \in L_m$. Alors $(\sigma_a - a^k)^2(f_2) = 0$, donc $(\nabla - k)^2(f_2) = 0$ et comme avant $(\nabla - k)(f_2) \in tX$. Puisque

$$(\nabla - k)(f_2) = \frac{\log(1 + ((\sigma_a - a^k)/a^k))}{\log a}(f_2) = \alpha t^k e_1 + \frac{\beta e_2}{a^k \log a} \equiv \frac{\beta}{a^k \log a} e_2 \pmod{tX}$$

et $e_2 \notin tX$, on obtient $\beta = 0$.

Pour l'instant on a obtenu f_1, f_2 tels que $\sigma_a(f_1) = f_1$ et $\sigma_a(f_2) = a^k f_2 + \alpha a^k \log a \cdot t^k e_1$ pour $a = 1 + p^m$. Un calcul immédiat montre que $\sigma_b(f_1) = f_1$ et $\sigma_b(f_2) = b^k f_2 + \alpha b^k \log b \cdot t^k e_1$ quand $b \in \{a, a^2, \dots\}$, donc pour tout $b \in 1 + p^m \mathbf{Z}_p$. On va enfin modifier f_1 et f_2 pour que ceci soit valable pour tout $b \in \mathbf{Z}_p^*$. Notons que si on y arrive, alors l'élément α de L_m est en fait dans L , ce qui permettra de conclure. En effet, en écrivant $\sigma_{ab}(f_2) = \sigma_a(\sigma_b(f_2))$ pour tous $a, b \in \mathbf{Z}_p^*$ et en utilisant le fait que $\sigma_c(f_2) = c^k f_2 + \alpha c^k \log c \cdot t^k e_1$ pour tout $c \in \mathbf{Z}_p^*$, on obtient (après un calcul direct laissé au lecteur) $\sigma_a(\alpha) = \alpha$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$, donc $\alpha \in L$.

Soit $\Gamma_m = \chi^{-1}(1 + p^m \mathbf{Z}_p)$. Puisque f_1 s'envoie sur e_1 et e_1 est Γ -invariant, on a $(\sigma_b - 1)f_1 \in Y^{\Gamma_m}$ pour tout $b \in \mathbf{Z}_p^*$. Un calcul immédiat montre que $Y^{\Gamma_m} = L_m e_1$, ce qui fournit $c_b \in L_m$ tel que $(\sigma_b - 1)f_1 = c_b e_1$. L'application $b \rightarrow c_b$ définit donc un 1-cocycle de Γ/Γ_m dans L_m . Le théorème de Hilbert 90 permet de conclure que l'on peut remplacer f_1 par $f_1 - x e_1$ pour un $x \in L_m$ convenable, pour le rendre Γ -invariant. Pour f_2 la situation est un peu plus compliquée, car dans ce cas $(\sigma_b - b^k)(f_2) \in Y_m^{\Gamma_m = \chi^k}$ et $Y_m^{\Gamma_m = \chi^k}$ est un L_m -module libre de rang 2, une base étant e_2 et $t^k e_1$. On peut donc écrire

$$(\sigma_b - b^k)(f_2) = b^k c'_b e_2 + b^k (\alpha \log b + c_b) \cdot t^k e_1$$

avec $c_b, c'_b : \Gamma/\Gamma_m \rightarrow L_m$. Un calcul fastidieux montre que c_b, c'_b sont des 1-cocycles, ce qui permet de conclure comme ci-dessus. □

LEMME 6.2. Avec les notations de la proposition 6.1, on a $\alpha = 0$ si et seulement si E est de de Rham.

Démonstration. E est de de Rham si et seulement si \check{E} l'est, et cela arrive si et seulement si $(\check{E}_{\text{dif},n})^\Gamma$ est un L -espace vectoriel de dimension 4 pour un/tout $n \geq m(E)$, puisque $D_{\text{dR}}(V(\check{E})) \simeq (\check{E}_{\text{dif},n})^\Gamma$. Or, en utilisant les formules explicites fournies par la proposition 6.1, on vérifie sans mal que $(\check{E}_{\text{dif},n})^\Gamma$ est le L -espace vectoriel de base $e_1, e_2/t^k, f_1, f_2/t^k$ si $\alpha = 0$ et le L -espace vectoriel de base $e_1, e_2/t^k, f_1$ sinon. □

PROPOSITION 6.3. Il existe $e'_1, e'_2, f'_1, f'_2 \in E_{\text{dif},m(E)}^+$ tels que :

- (a) e'_1, e'_2 est une R_n -base de $D_{\text{dif},n}^+$ et e'_1, e'_2, f'_1, f'_2 est une R_n -base de $E_{\text{dif},n}^+$ pour $n \geq m(E)$;
- (b) on a $\sigma_a(e'_1) = a^{1-k} e'_1, \sigma_a(e'_2) = a e'_2, \sigma_a(f'_1) = a^{1-k} f'_1$ et enfin $\sigma_a(f'_2) = a f'_2 + \beta a \log a \cdot t^k e'_1$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$, pour un certain $\beta \in L$.

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 6.1, en travaillant avec $D \otimes \chi^{k-1}$ et $E \otimes \chi^{k-1}$ au lieu de \check{D} et \check{E} . □

Si M est un Γ -module, on note $M(i)$ le module $M \otimes \chi^i$ obtenu en tordant l'action de Γ par χ^i .

PROPOSITION 6.4. (a) L'application $R_n \rightarrow D_{\text{dif},n}$ qui à A associe $(A/t^k)e'_2$ induit un isomorphisme de $R_n[\Gamma]$ -modules

$$R_n/t^k R_n \simeq (D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0}(k-1).$$

(b) L'application $R_n \oplus R_n \rightarrow E_{\text{dif},n}$ qui à (A, B) associe $(A/t^k)e'_2 + (B/t^k)f'_2$ induit un isomorphisme de $R_n[\Gamma]$ -modules

$$R_n/t^k R_n \oplus R_n/t^k R_n \simeq (E_{\text{dif},n}/E_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0}(k-1).$$

Démonstration. On ne traite que le (b), qui est plus délicat. Notons $a = 1 + p^m$, fixons $0 \leq i < k$ et considérons un élément $Ae'_1 + Be'_2 + Cf'_1 + Df'_2 \in E_{\text{dif},n}$ dont la classe appartient à $(E_{\text{dif},n}/E_{\text{dif},n}^+)^{\sigma_a = a^{i+1-k}}$. En utilisant les formules de la proposition 6.3, cette appartenance se traduit par

$$\begin{aligned} \sigma_a(B) - a^{i-k}B &\in R_n, & \sigma_a(C) - a^iC &\in R_n, & \sigma_a(D) - a^{i-k}D &\in R_n, \\ (\sigma_a(A) - a^iA)a^{1-k} + \beta a \log a \cdot t^k \sigma_a(D) &\in R_n. \end{aligned}$$

Les trois premières conditions entraînent $B \in (1/t^{k-i})L_n + R_n$, $D \in (1/t^{k-i})L_n + R_n$ et $C \in R_n$. Puisque $t^k D \in R_n$, la dernière condition entraîne $A \in R_n$. En utilisant ces observations et le lemme des noyaux, on obtient que $(E_{\text{dif},n}/E_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0}$ est l'ensemble des classes $\overline{Be'_2 + Df'_2}$ avec $B, D \in t^{-k}R_n$. Cela montre déjà que l'application $F : (A, B) \rightarrow (A/t^k)e'_2 + (B/t^k)f'_2$ induit un isomorphisme de R_n -modules

$$R_n/t^k R_n \oplus R_n/t^k R_n \simeq (E_{\text{dif},n}/E_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0}.$$

En utilisant à nouveau les formules de la proposition 6.3, on vérifie que $F \circ \sigma_a = a^{k-1}\sigma_a \circ F$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$, donc $F \otimes \chi^{k-1}$ est un isomorphisme de $R_n[\Gamma]$ -modules, ce qui permet de conclure. \square

La suite exacte $0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow 0$ induit, pour $n \geq m(E)$, une suite exacte $0 \rightarrow D^{]0,r_n]} \rightarrow E^{]0,r_n]} \rightarrow D^{]0,r_n]} \rightarrow 0$ et, par localisation en $\varepsilon^{(n)} - 1$, des suites exactes de $R_n[\Gamma]$ -modules $0 \rightarrow D_{\text{dif},n}^+ \rightarrow E_{\text{dif},n}^+ \rightarrow D_{\text{dif},n}^+ \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow D_{\text{dif},n} \rightarrow E_{\text{dif},n} \rightarrow D_{\text{dif},n} \rightarrow 0$ pour $n \geq m(E)$. Le lemme du serpent fournit donc une suite exacte de $R_n[\Gamma]$ -modules

$$0 \rightarrow D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+ \rightarrow E_{\text{dif},n}/E_{\text{dif},n}^+ \rightarrow D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+ \rightarrow 0.$$

LEMME 6.5. Pour tout $n \geq m(E)$, la suite exacte précédente induit une décomposition de $R_n[\Gamma]$ -modules

$$(E_{\text{dif},n}/E_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0} \simeq (D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0} \oplus (D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 6.4. \square

6.2 Les modules $O_n(\mathcal{D})$ et $M_n(\mathcal{D})$

Dans ce § on introduit certains sous-modules de $\check{E}_{\text{dif},n}^+$ qui joueront un rôle crucial dans les arguments de dualité dont on aura besoin pour contrôler $\Pi_\delta(E)^{\text{alg}}$. On garde les hypothèses du début de ce chapitre et on rappelle que

$$\mu_{n,k} = \prod_{i=0}^{k-1} (\sigma_{1+p^n} - (1+p^n)^{i+1-k}) \in O_L[\Gamma].$$

DÉFINITION 6.6. Si $\mathcal{D} \in \{D, E\}$ et si $n \geq m(\mathcal{D})$, on note (voir le § 5.2 pour $\{, \}_{\text{dif}}$)

$$O_n(\mathcal{D}) = \{ \check{z} \in \check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+ \mid \{ \check{z}, z \}_{\text{dif}} = 0 \forall z \in (\mathcal{D}_{\text{dif},n}/\mathcal{D}_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0} \}.$$

LEMME 6.7. Pour tout $n \geq m(\mathcal{D})$ on a

$$O_n(\mathcal{D}) = \prod_{i=0}^{k-1} (\sigma_{1+p^n} - (1+p^n)^i) \check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+$$

Démonstration. Notons $a = 1 + p^n$ et $\sigma = \sigma_a$. Soit $0 \leq i \leq k - 1$. Puisque $\{, \}_{\text{dif}}$ est parfait et Γ -invariant, $(\mathcal{D}_{\text{dif},n}/\mathcal{D}_{\text{dif},n}^+)^{\sigma - a^{i+1-k} = 0}$ est en dualité parfaite avec $\check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+ / (\sigma^{-1} - a^{i+1-k})$. Cette observation combinée avec le (c) de la remarque 4.15 permettent de conclure que

$$O_n(\mathcal{D}) = \prod_{i=0}^{k-1} (\sigma^{-1} - a^{i+1-k}) \check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+ = \prod_{i=0}^{k-1} (\sigma - a^i) \check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+ \quad \square$$

PROPOSITION 6.8. (a) Pour tout $n \geq m(D)$, $O_n(D)$ est un R_n -module libre de base $t^k e_1$ et e_2 .

(b) Pour tout $n \geq m(E)$, $O_n(E)$ est un R_n -module libre de base $t^k e_1, t^k f_1, e_2, f_2$.

Démonstration. Nous allons traiter seulement le (b), le (a) étant similaire, et plus simple. Fixons $n \geq m(E)$ et notons $a = 1 + p^n$ et $\sigma = \sigma_a$. Si $A, B, C, D \in R_n$, un calcul immédiat montre que pour $0 \leq i < k$ on a

$$\begin{aligned} &(\sigma - a^i)(Ae_1 + Be_2 + Cf_1 + Df_2) \\ &= ((\sigma - a^i)A + \alpha a^k t^k \log a \cdot \sigma(D))e_1 + (a^k \sigma - a^i)B \cdot e_2 + (\sigma - a^i)C \cdot f_1 + (a^k \sigma - a^i)D \cdot f_2. \end{aligned}$$

Or $B \rightarrow (a^k \sigma - a^i)B$ est bijective sur R_n et l'image de $A \rightarrow (\sigma - a^i)A$ est l'ensemble des séries $f \in R_n$ dont le coefficient de t^i est nul (utiliser le fait que $\sigma(t) = at$). On en déduit que $(\sigma - a^i)\check{E}_{\text{dif},n}^+$ est l'ensemble des combinaisons $A_1 e_1 + B_1 e_2 + C_1 f_1 + D_1 f_2$ telles que les coefficients de t^i dans A_1 et C_1 soient nuls. On conclut en prenant l'intersection sur $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$ et en utilisant le lemme 6.7. \square

Rappelons que $\nabla_{2k} = \prod_{i=0}^{2k-1} (\nabla - i)$. Le lemme suivant est plus ou moins implicite dans la preuve de [Dos12a, lemme 3].

LEMME 6.9. Soient $B \in R_n$ et $P = \prod_{i=0}^{2k-1} (X - i)$. Alors $P'(\nabla)(B) \in t^{2k} R_n$ si et seulement si $B \in t^{2k} R_n$.

Démonstration. Si $B = \sum_{j \geq 0} \alpha_j t^j$, alors on a des égalités dans $R_n/t^{2k} R_n$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{\nabla_{2k}}{\nabla - j} B &= \sum_{s=0}^{2k-1} \alpha_s \cdot \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{\nabla_{2k}}{\nabla - j} (t^s) \\ &= \sum_{s=0}^{2k-1} \alpha_s \cdot \frac{\nabla_{2k}}{\nabla - s} (t^s) \\ &= \sum_{s=0}^{2k-1} (-1)^{2k-1-s} s! \cdot (2k - s - 1)! \alpha_s \cdot t^s. \end{aligned}$$

On a donc $P'(\nabla)(B) \in t^{2k} R_n$ si et seulement si $\alpha_s = 0$ pour tout $0 \leq s \leq 2k - 1$, d'où le résultat. \square

DÉFINITION 6.10. Si $\mathcal{D} \in \{D, E\}$ et si $n \geq m(\mathcal{D})$, on pose

$$M_n(\mathcal{D}) = \{z \in \check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+ \mid \nabla_{2k}(z) \in t^k O_n(\mathcal{D})\}.$$

PROPOSITION 6.11. (a) On a $M_n(D) = \check{D}_{\text{dif},n}^+$ pour $n \geq m(D)$.

(b) Si E est de de Rham, alors $M_n(E) = \check{E}_{\text{dif},n}^+$ pour tout $n \geq m(E)$. Si ce n'est pas le cas, alors $M_n(E)$ est un R_n -module libre de base $e_1, f_1, e_2, t^k f_2$.

Démonstration. Nous ne traiterons que le (b), qui est plus technique. En passant à la limite (pour $a \rightarrow 1$) dans la proposition 6.1 on obtient

$$\nabla(e_1) = 0, \quad \nabla(f_1) = 0, \quad \nabla\left(\frac{e_2}{t^k}\right) = 0, \quad \nabla\left(\frac{f_2}{t^k}\right) = \alpha \cdot e_1.$$

On en déduit, pour $B \in L_n((t))$ et $P \in L_n[X]$, les égalités $P(\nabla)(B \cdot x) = P(\nabla)(B) \cdot x$ si $x \in \{e_1, f_1\}$,

$$P(\nabla)(B \cdot e_2) = P(\nabla)\left(t^k B \cdot \frac{e_2}{t^k}\right) = \frac{P(\nabla)(t^k B)}{t^k} \cdot e_2 = P(\nabla + k)(B) \cdot e_2$$

et enfin, avec un calcul semblable à celui pour $P(\nabla)(B \cdot e_2)$,

$$P(\nabla)(B \cdot f_2) = P(\nabla + k)(B) \cdot f_2 + \alpha P'(\nabla + k)(B) \cdot t^k e_1.$$

Soit $P = \prod_{i=0}^{2k-1} (X - i)$, de telle sorte que $P(\nabla) = \nabla_{2k}$. On vérifie sans mal que $P(\nabla)(R_n) \subset t^{2k} R_n$ et que $P(\nabla + k)(R_n) \subset t^k R_n$. En utilisant la proposition 6.8, on en déduit que $Ae_1 + Be_2 + Cf_1 + Df_2 \in \check{E}_{\text{dif},n}^+$ est dans $M_n(E)$ si et seulement si $\alpha P'(\nabla + k)(D) \in t^k R_n$. On conclut en utilisant les lemmes 6.2 et 6.9 et en remarquant que la condition $\alpha P'(\nabla + k)(D) \in t^k R_n$ équivaut à $\alpha P'(\nabla)(t^k D) \in t^{2k} R_n$. \square

7. Preuve des résultats principaux

On fixe dans ce chapitre $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ de dimension 2, absolument irréductible et tel que $V(D)$ soit de de Rham, à poids de Hodge–Tate distincts. On se donne une suite exacte non scindée $0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow 0$ et on suppose que $E \in \mathcal{C}_L(\delta)$ (ce qui entraîne $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$), avec $\delta = \chi^{-1} \det V(D)$. Notons $\Pi = \Pi_\delta(D)$ et $\Pi_1 = \Pi_\delta(E)$, de telle sorte qu'on ait une suite exacte non scindée $0 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow 0$. Etant données nos hypothèses, un théorème de Colmez ([Col10b, théorème 0.20] ou [Dos12a, théorème 4]) montre que $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$.

7.1 Invariants sous l'unipotent supérieur

Les deux résultats qui suivent sont élémentaires, mais nous seront bien utiles plus tard.

LEMME 7.1. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\Pi^U = 0$.

Démonstration. Soit Θ la boule unité de Π . Il suffit de montrer que $\Theta^U = 0$. Soit $v \in \Theta^U$ et $n \geq 1$. L'image v_n de v dans $\Theta/p^n\Theta$ est invariante par U et comme $\Theta/p^n\Theta$ est une représentation lisse de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, v_n est invariant par un sous-groupe ouvert H de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Puisque le sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ engendré par H et U contient²⁰ $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on en déduit que v_n est invariant par

²⁰ Si $n \geq 1$ et $c, d \in p^n \mathbf{Z}_p$ sont non nuls, l'identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c+d}{cd} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c+d}{d^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{c}{d} \end{pmatrix}$$

montre que le sous-groupe de $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ engendré par U et $\begin{pmatrix} x & 0 \\ p^n \mathbf{Z}_p & 1 \end{pmatrix}$ contient les matrices $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbf{Q}_p^*$. Il contient donc aussi les conjugués de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^n \mathbf{Z}_p & 1 \end{pmatrix}$ par ces matrices, autrement dit il contient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Q}_p & 1 \end{pmatrix}$. Mais il est standard que $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est engendré par U et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Q}_p & 1 \end{pmatrix}$.

$SL_2(\mathbf{Q}_p)$. Ceci étant vrai pour tout n , on en déduit que v est invariant par $SL_2(\mathbf{Q}_p)$. Comme Π est absolument irréductible et de dimension infinie, il découle de [CD14, corollaire III.37] que $\Pi^{SL_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$, ce qui permet de conclure. \square

LEMME 7.2. Soient $j \geq 1$ et $v \in \Pi$ tels que $(1 - u)^j v = 0$ pour tout $u \in U$. Alors $v = 0$.

Démonstration. On procède par récurrence sur j , le cas $j = 1$ étant le lemme précédent. Pour conclure, il suffit de montrer que $(1 - u')(1 - u)^{j-1}v = 0$ pour tous $u, u' \in U$. Notons $u = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u' = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $d = \min(v_p(x), v_p(y))$. On a²¹ $1 - u \mid 1 - u'$ ou $1 - u' \mid 1 - u$ dans $O_L \left[\left[\begin{pmatrix} 1 & p^d O_L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right]$, ce qui montre que $(1 - u')(1 - u)^{j-1}$ est un multiple de $(1 - u)^j$ ou de $(1 - u')^j$ dans cette algèbre d'Iwasawa, d'où le résultat (car Π est un module sur cette algèbre d'Iwasawa). \square

7.2 L'espace $\Pi_c^{P\text{-alg}}$

Dans cette partie nous supposons que les poids de Hodge–Tate de D sont 1 et $1 - k$ pour un entier $k \geq 1$. Nous avons introduit dans le § 4.5 des espaces $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$ et $(\Pi_1)_{c,k}^{P\text{-alg}}$.

Pour simplifier les notations (et puisque k est fixé dans cette section), nous allons noter $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ au lieu de $\Pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$ et pareil pour Π_1 .

LEMME 7.3. Si $\pi \in \{\Pi, \Pi_1\}$, $u \in U$ et $v \in \pi^{\text{alg}}$, alors $(u - 1)^k v \in \pi_c^{P\text{-alg}}$.

Démonstration. D'après la proposition 3.5 on a $\pi^{\text{alg}} = W_{1-k,k} \otimes_L \pi^{\text{lc}}$ pour une représentation lisse π^{lc} . Ainsi, pour tout $v \in \pi^{\text{alg}}$ les applications $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$ et $x \mapsto x^{k-1} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$ (définies sur \mathbf{Z}_p , respectivement \mathbf{Z}_p^*) sont localement polynômiales de degré $\leq k - 1$. Il s'ensuit que $v \in \pi^{U,k}$ (lemme 4.4) et que v est $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -fini. En combinant cela avec le lemme 4.9, on obtient $(u - 1)^k v \in \pi_c^{P\text{-fini}}$. Pour conclure, il reste à vérifier que $(u - 1)^k v$ est tué par $\mu_{n,k}$ pour n assez grand. L'application $x \mapsto x^{k-1} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$ est localement polynômiale de degré $\leq k - 1$, donc on peut trouver n tel qu'elle soit polynômiale sur $1 + p^n \mathbf{Z}_p$. Ainsi, il suffit de montrer que si $N \geq 0$ est un entier et $v \in \pi$ est un vecteur tel que l'application $x \mapsto x^N \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$ soit polynômiale de degré $\leq N$ sur $1 + p^n \mathbf{Z}_p$, alors

$$\prod_{i=0}^N \left(\begin{pmatrix} 1 + p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (1 + p^n)^{i-N} \right) v = 0.$$

Cela se démontre par récurrence sur N , le cas $N = 0$ étant clair. En supposant le résultat vrai pour $N - 1$, il suffit²² d'appliquer l'hypothèse de récurrence à

$$v_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 + p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (1 + p^n)^{-N} \right) v \in \pi$$

pour conclure. \square

²¹ Cela suit de ce que $u' = u^a$ ou $u = (u')^a$ pour un $a \in O_L$, et du fait que $1 - x$ divise $1 - x^a$ dans $O_L[[x - 1]]$.

²² Pour montrer que v_1 satisfait l'hypothèse de récurrence pour $N - 1$, noter que par hypothèse on peut trouver $\alpha_0, \dots, \alpha_N \in \pi$ tels que pour tout $x \in 1 + p^n \mathbf{Z}_p$ on ait

$$x^N \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \sum_{i=0}^N x^i \alpha_i.$$

Un calcul sans difficulté montre que pour tout $x \in 1 + p^n \mathbf{Z}_p$ on a

$$x^{N-1} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_1 = \sum_{i=0}^{N-1} x^i (1 + p^n)^{-N} [(1 + p^n)^{i+1} - 1] \alpha_{i+1}.$$

PROPOSITION 7.4. *La suite exacte $0 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow 0$ induit une suite exacte scindée de B -modules*

$$0 \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}} \rightarrow (\Pi_1)_c^{P\text{-alg}} \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}} \rightarrow 0.$$

Démonstration. Il suffit de combiner la proposition 4.17 et le lemme 6.5 (en passant à la limite inductive sur n). □

Rappelons que ζ_l est le caractère de B qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ sur $a^l d^{-l}$.

LEMME 7.5. *La famille d'isomorphismes décrite dans la proposition 6.4 induit un isomorphisme de B -modules*

$$\Pi_c^{P\text{-alg}} \simeq \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty[[t]]/t^k)^\Gamma \otimes \zeta_{1-k}.$$

Démonstration. Par construction ces isomorphismes sont compatibles avec le passage de n à $n + 1$ et induisent un isomorphisme de Γ -modules

$$(D_{\text{dif},\infty}/D_{\text{dif},\infty}^+)^\text{alg} \simeq (L_\infty[[t]]/t^k)(1 - k).$$

Le résultat suit alors du (b) de la remarque 4.2 et de la proposition 4.17. □

7.3 Preuve du théorème 1.1

Le but de cette section est la démonstration du résultat suivant.

THÉORÈME 7.6. *Avec les hypothèses et notations introduites au début de ce chapitre (cf. la discussion qui précède le § 7.1), les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\Pi_1^\text{alg} \neq \Pi^\text{alg}$;
- (b) Π_1^alg est dense dans Π_1 ;
- (c) $V(E)$ est de de Rham.

Avant de passer à la preuve du théorème 7.6, expliquons pourquoi il entraîne le théorème principal 1.1. On se place dans le contexte du théorème 1.1, pour lequel on renvoie à l'introduction. Soient D et E les duaux de Cartier de $D(\Pi)$ et $D(\Pi_1)$. D'après [CDP14a, Theorem 1.1, Corollary 1.2], D est de dimension 2, absolument irréductible et δ est le caractère central de Π . D'après le (d) du théorème 2.2, on a des isomorphismes canoniques $\Pi \simeq \Pi_\delta(D)$ et $\Pi_1 \simeq \Pi_\delta(E)$. Puisque $\Pi^\text{alg} \neq 0$, un théorème de Colmez ([Col10b, théorème 0.20] ou [Dos12a, théorème 4]) montre que D est de de Rham, à poids de Hodge–Tate distincts. Les hypothèses du théorème 7.6 sont donc satisfaites, ce qui permet de conclure.

Revenons maintenant à la preuve du théorème 7.6. Quitte à faire une torsion par un caractère algébrique, on peut supposer que les poids de Hodge–Tate de D sont 1 et $1 - k$, avec $k \in \mathbf{N}^*$. Si $\pi \in \{\Pi, \Pi_1\}$, nous écrirons $\pi_c^{P\text{-alg}}$ au lieu de $\pi_{c,k}^{P\text{-alg}}$. La proposition 3.7 nous permet de supposer que E est de Hodge–Tate.

La proposition suivante est l'ingrédient technique crucial dans la preuve du théorème 7.6. Sa preuve utilise la plupart des résultats établis dans les chapitres précédents.

PROPOSITION 7.7. *Si $\mathcal{D} \in \{D, E\}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) \mathcal{D} est de de Rham ;
- (b) $(u^-)^k$ tue $\Pi_\delta(\mathcal{D})_c^{P\text{-alg}}$;
- (c) $\Pi_\delta(\mathcal{D})_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi_\delta(\mathcal{D})^\text{alg}$.

Démonstration. Posons, pour $n \geq m(\mathcal{D})$

$$N_n = \varphi^{-n}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}((\Pi^{\text{an}})^*)).$$

Nous aurons besoin de quelques préliminaires.

LEMME 7.8. *L'opérateur $(u^-)^k$ tue $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ si et seulement si $N_n \subset M_n(\mathcal{D})$ pour tout $n \geq m(\mathcal{D})$.*

Démonstration. Par Hahn–Banach et puisque $\{, \}_{\mathbf{P}^1}$ est G -équivariant, $(u^-)^k$ tue $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ si et seulement si $(u^-)^k(\Pi^{\text{an}})^*$ est orthogonal à $\Pi_c^{P\text{-alg}}$. D'après le théorème 5.3 cela arrive si et seulement si

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \{i_{j,n}((u^-)^k \check{z}), \phi_v(p^{-j})\}_{\text{dif}} = 0$$

pour tous $\check{z} \in (\Pi^{\text{an}})^*$, $v \in \Pi_c^{P\text{-alg}}$ et $n \geq m(\mathcal{D})$ assez grand pour que $\phi_v(p^j) \in D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$. Le corollaire 4.19 montre que cela équivaut encore à l'égalité

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \{i_{j,n}((u^-)^k \check{z}), u_j\}_{\text{dif}} = 0$$

pour tous $\check{z} \in (\Pi^{\text{an}})^*$, $(u_j)_{j \in \mathbf{Z}} \in \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} (D_{\text{dif},n}/D_{\text{dif},n}^+)^{\mu_{n,k}=0}$ et $n \geq m(\mathcal{D})$. Par définition de $O_n(\mathcal{D})$, cela revient à $i_{j,n}((u^-)^k \check{z}) \in O_n(\mathcal{D})$ pour $j \in \mathbf{Z}$, $\check{z} \in (\Pi^{\text{an}})^*$, $n \geq m(\mathcal{D})$. Enfin, d'après le lemme 5.5 ceci équivaut à $i_{j,n}(\check{z}) \in M_n(\mathcal{D})$ pour tout $\check{z} \in (\Pi^{\text{an}})^*$, $j \in \mathbf{Z}$ et $n \geq m(\mathcal{D})$. On conclut en revenant à la définition des applications $i_{j,n}$. \square

Puisque $(\Pi^{\text{an}})^* \subset \check{D}^{]0,r_m(\mathcal{D})]} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, on a $N_n \subset \check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+$ pour $n \geq m(\mathcal{D})$. L'implication (a) entraîne (b) découle donc de la proposition 6.11 et du lemme 7.8.

Supposons que (b) est vraie. On déduit alors du corollaire 5.4 que tout vecteur de $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ est tué par un idéal de codimension finie dans $U(\mathfrak{sl}_2)$, et donc est $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -algébrique. Puisque δ est localement algébrique, on obtient $\Pi_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi^{\text{alg}}$, d'où le (c).

Enfin, si (c) est vraie, la proposition 3.5 montre que $(u^-)^k$ tue Π^{alg} et donc $(u^-)^k$ tue $\Pi_c^{P\text{-alg}}$. Le lemme 7.8 permet de conclure que $N_n \subset M_n(\mathcal{D})$ pour $n \geq m(\mathcal{D})$. Nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 7.9. *Le sous-espace N_n engendre $\check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+$ en tant que $L_n[[t]]$ -module.*

Démonstration. Puisque Π^{an} est dense dans Π [ST03, Theorem 7.1], on a une inclusion $\Pi^* \subset (\Pi^{\text{an}})^*$, donc il suffit de vérifier que $\varphi^{-n}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\Pi^*))$ engendre $\check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+$. Il découle des corollaires III.24 de [CD14], II.5.12 et II.7.2 de [Col10a] que $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\Pi^*)$ contient une base de $D^{]0,r_n]}$ pour $n \geq m(\mathcal{D})$ (cela peut demander d'augmenter $m(\mathcal{D})$). Le résultat s'ensuit, puisque $\check{D}_{\text{dif},n}^+$ est engendré par $\varphi^{-n}(D^{]0,r_n]})$. \square

Le lemme 7.9 entraîne l'égalité $M_n(\mathcal{D}) = \check{\mathcal{D}}_{\text{dif},n}^+$, et la proposition 6.11 permet de conclure que \mathcal{D} est de de Rham, ce qui finit la preuve de la proposition 7.7. \square

Revenons à la preuve du théorème 7.6. La suite exacte non scindée

$$0 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow 0$$

combinée avec l'irréductibilité de Π montrent que l'adhérence de Π_1^{alg} est soit Π , soit Π_1 . Autrement dit, Π_1^{alg} est dense dans Π_1 ou égal à Π^{alg} , ce qui montre que (a) et (b) sont équivalents.

Si E est de de Rham et $\Pi_1^{\text{alg}} = \Pi^{\text{alg}}$, alors la proposition 7.7 montre que

$$(\Pi_1)_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi_1^{\text{alg}} = \Pi^{\text{alg}},$$

donc $(\Pi_1)_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi_c^{P\text{-alg}}$, ce qui contredit la proposition 7.4. Ainsi, (c) entraîne (a).

Pour finir la preuve du théorème 7.6, il suffit de montrer que (a) entraîne l'inclusion $(\Pi_1)_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi_1^{\text{alg}}$ (car cette inclusion permet de conclure que $V(E)$ est de de Rham grâce à la proposition 7.7).

Supposons donc que $\Pi_1^{\text{alg}} \neq \Pi^{\text{alg}}$ et montrons que $(\Pi_1)_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi_1^{\text{alg}}$, ce qui demande quelques préliminaires.²³

DÉFINITION 7.10. On note $(\Pi_1)_c^{\text{alg}}$ le sous-espace de Π_1^{alg} engendré par les vecteurs $(u - 1)^k \cdot v$, avec $u \in U = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $v \in \Pi_1^{\text{alg}}$.

Le lemme 7.3 montre que

$$(\Pi_1)_c^{\text{alg}} \subset \Pi_1^{\text{alg}} \cap (\Pi_1)_c^{P\text{-alg}}.$$

La proposition 7.4 fournit une suite exacte de B -modules

$$0 \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}} \rightarrow (\Pi_1)_c^{P\text{-alg}} \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}} \rightarrow 0. \tag{1}$$

Admettons pour un instant que le morphisme $(\Pi_1)_c^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}}$ déduit de la suite exacte (1) et de l'inclusion $(\Pi_1)_c^{\text{alg}} \subset (\Pi_1)_c^{P\text{-alg}}$ est surjectif. On en déduit l'inclusion $(\Pi_1)_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi_1^{\text{alg}}$ désirée, car

$$(\Pi_1)_c^{P\text{-alg}} = (\Pi_1)_c^{\text{alg}} + \Pi_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi_1^{\text{alg}},$$

l'inclusion étant une conséquence de $\Pi_c^{P\text{-alg}} \subset \Pi^{\text{alg}}$ (qui, elle, suit de la proposition 7.7, car D est de de Rham).

Il nous reste donc à prouver la surjectivité du morphisme $(\Pi_1)_c^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}}$, ce qui demande encore quelques préliminaires.

LEMME 7.11. Il existe $v \in \Pi_1^{\text{alg}} \setminus \Pi^{\text{alg}}$ et $d \geq 1$ tels que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = a^{1-k} v$ pour tous $a \in 1 + p^d \mathbf{Z}_p$.

Démonstration. D'après la proposition 3.5 on peut écrire $\Pi_1^{\text{alg}} = W_{1-k,k} \otimes_L \Pi_1^{\text{lc}}$ et $\Pi^{\text{alg}} = W_{1-k,k} \otimes_L \Pi^{\text{lc}}$ avec $\Pi^{\text{lc}}, \Pi_1^{\text{lc}}$ des représentations lisses distinctes (car $\Pi_1^{\text{alg}} \neq \Pi^{\text{alg}}$). Soit $v_0 \in W_{1-k,k}$ non nul tel que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_0 = a^{1-k} v_0$ pour tous $a \in \mathbf{Z}_p^*$ (il est immédiat de vérifier qu'un tel vecteur existe), et soit $v_1 \in \Pi_1^{\text{lc}} \setminus \Pi^{\text{lc}}$. Il suffit de poser $v = v_0 \otimes v_1$ et de choisir d tel que v_1 soit fixé par $\begin{pmatrix} 1+p^d \mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. \square

Nous allons fixer un vecteur v et un entier $d \geq 1$ comme dans le lemme précédent. Posons, pour $n \geq 1$

$$v_n = \left(\begin{pmatrix} 1 & p^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \right)^k v \in (\Pi_1^{\text{alg}})_c \subset (\Pi_1)_c^{P\text{-alg}}.$$

LEMME 7.12. Il existe $n \geq 1$ tel que l'image \bar{v}_n de v_n dans Π (via le projection $\Pi_1 \rightarrow \Pi$) soit non nulle.

Démonstration. Sinon, l'image \bar{v} de v dans Π est tuée par $\left(\begin{pmatrix} 1 & p^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \right)^k$ pour tout n , et donc par $(u - 1)^k$ pour tout $u \in U$. Le lemme 7.2 montre que $\bar{v} = 0$, i.e. $v \in \Pi \subset \Pi_1$. Cela contredit le fait que $v \in \Pi_1^{\text{alg}} \setminus \Pi^{\text{alg}}$ et permet de conclure. \square

²³ La preuve suit de près les arguments du corollaire VI.5.9 de [Col10b], mais à la demande d'un des rapporteurs, nous allons détailler un peu l'argument.

Fixons un entier $n \geq 1$ comme dans le lemme précédent. Identifions $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ avec $\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty[[t]]/t^k)^\Gamma \otimes \zeta_{1-k}$ comme dans le lemme 7.5. Ainsi, on peut regarder $\bar{v}_n \in \Pi_c^{P\text{-alg}}$ comme une fonction $\phi_n \in \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty[[t]]/t^k)^\Gamma$.

LEMME 7.13. *L'image de ϕ_n n'est pas contenue dans $tL_\infty[[t]]/t^k$.*

Démonstration. Soit $a \in 1 + p^d\mathbf{Z}$ et notons

$$\lambda_a = \frac{\begin{pmatrix} 1 & ap^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1}{\begin{pmatrix} 1 & p^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1} = \sum_{i=0}^{a-1} \begin{pmatrix} 1 & ip^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_p \left[\left[\begin{pmatrix} 1 & p^{-n}\mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right].$$

Par définition, l'action de λ_a sur $\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty[[t]]/t^k)^\Gamma$ est donnée par

$$(\lambda_a \cdot \phi)(x) = \frac{[(1+T)^{ax/p^n}] - 1}{[(1+T)^{x/p^n}] - 1} \cdot \phi(x) = \frac{\varepsilon(ax/p^n)e^{axt/p^n} - 1}{\varepsilon(x/p^n)e^{xt/p^n} - 1} \cdot \phi(x) \in L_\infty[[t]]/t^k. \tag{2}$$

L'égalité $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = a^{1-k}v$ fournit après un petit calcul la relation

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{v}_n = a^{1-k} \lambda_a^k \cdot \bar{v}_n,$$

donc²⁴ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p^*$ on a

$$(\lambda_a^k \cdot \phi_n)(x) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi_n(x) = \sigma_a(\phi_n(x)),$$

autrement dit (en utilisant la relation (2))

$$\sigma_a(\phi_n(x)) = \left(\frac{\varepsilon(ax/p^n)e^{axt/p^n} - 1}{\varepsilon(x/p^n)e^{xt/p^n} - 1} \right)^k \phi_n(x). \tag{3}$$

En supposant que $\text{Im}(\phi_n) \subset tL_\infty[[t]]/t^k$, nous allons montrer que $\phi_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p^*$, ce qui contredira le lemme 7.12 et permettra de conclure. Soit donc $x \in \mathbf{Q}_p^*$ et supposons que $\phi_n(x) \neq 0$. Si j est le plus grand entier tel que $\phi_n(x) \in t^j L_\infty[[t]]/t^k$, on a $1 \leq j < k$ et donc il existe $\alpha \in L_\infty[[t]]/t^{j-k}$ dont la réduction $\bar{\alpha} \in L_\infty$ modulo t soit non nulle et tel que $\phi_n(x) = t^j \alpha$. Soit $\rho_a \in L_\infty$ la réduction modulo t de $(\varepsilon(ax/p^n)e^{axt/p^n} - 1)/(\varepsilon(x/p^n)e^{xt/p^n} - 1)$, donc

$$\rho_a = \frac{\varepsilon(ax/p^n) - 1}{\varepsilon(x/p^n) - 1} \quad \text{si } \varepsilon(x/p^n) \neq 1 \quad \text{et} \quad \rho_a = a \quad \text{sinon.}$$

En divisant la relation (3) (avec $\phi_n(x) = t^j \alpha$) par t^j et en réduisant modulo t on obtient

$$a^j \sigma_a(\bar{\alpha}) = \rho_a^k \cdot \bar{\alpha}$$

pour tout $a \in 1 + p^d\mathbf{Z}$. On choisit $a \in 1 + p^d\mathbf{Z}$ différent de 1 tel que $v_p((a-1)x) \geq n$ (donc $\varepsilon(ax/p^n) = \varepsilon(x/p^n)$) et $\rho_a \in \{1, a\}$ et $\sigma_a(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$ (rappelons que $\bar{\alpha} \in L_\infty$). La relation précédente devient $(a^j - \rho_a^k) \cdot \bar{\alpha} = 0$ dans L_∞ , ce qui contredit $\bar{\alpha} \neq 0$ et $a^j \neq \rho_a^k$ (car $1 \leq j < k$). Le résultat s'ensuit. □

²⁴ En tenant compte de la torsion par ζ_{1-k} .

Nous pouvons enfin conclure quant à la surjectivité du morphisme $\iota : (\Pi_1)_c^{\text{alg}} \rightarrow \Pi_c^{P\text{-alg}}$. L'image $\text{Im}(\iota)$ de ce morphisme est un sous B -module de $\Pi_c^{P\text{-alg}}$, car $(\Pi_1)_c^{\text{alg}}$ est stable par B . En identifiant les B -modules $\Pi_c^{P\text{-alg}}$ et $\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty[[t]]/t^k)^\Gamma \otimes \zeta_{1-k}$, on peut regarder $\text{Im}(\iota)$ comme sous B -module de $\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty[[t]]/t^k)^\Gamma \otimes \zeta_{1-k}$. Le lemme 7.13 montre que $\text{Im}(\iota)$ contient une fonction dont l'image n'est pas contenue dans $tL_\infty[[t]]/t^k$. La preuve de la proposition VI.2.6 de [Col10b] (c'est un argument élémentaire basé sur l'irréductibilité du B -module $\text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma$, cf. le lemme VI.2.5 de [Col10b]) permet de conclure que $\text{Im}(\iota) = \text{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty[[t]]/t^k)^\Gamma \otimes \zeta_{1-k}$, d'où la surjectivité de ι .

7.4 Déformations de de Rham

Rappelons que si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow L^*$ est un caractère continu (pas forcément unitaire), alors on dispose d'un (φ, Γ) -module $\mathcal{R}(\delta)$ (qui ne correspond à une représentation galoisienne que si δ est unitaire), qui a une base e telle que $\varphi(e) = \delta(p)e$ et $\sigma_a(e) = \delta(a)e$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

DÉFINITION 7.14. Soit V une L -représentation absolument irréductible de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, de dimension 2.

(a) On dit que V est trianguline si on peut trouver des caractères δ_1 et δ_2 et une suite exacte de (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}

$$0 \rightarrow \mathcal{R}(\delta_1) \rightarrow D_{\text{rig}} \rightarrow \mathcal{R}(\delta_2) \rightarrow 0,$$

où $D = D(V)$.

(b) On dit que V est *spéciale* si V est trianguline, potentiellement cristalline, et si on peut trouver une suite exacte comme dans (a) et telle que, en posant $w(V) = w(\delta_1) - w(\delta_2)$, on ait

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} \in \{x^{w(V)}|x|, x^{w(V)}|x|^{-1}\}.$$

Notons que $w(V)$ est la différence des poids de Hodge–Tate de V . De plus, on vérifie facilement que V est spéciale si et seulement si son dual de Cartier $V^*(1)$ est spéciale. La propriété fondamentale des représentations spéciales est le résultat suivant de Colmez [Col11, théorème 4.12].

PROPOSITION 7.15. Soit $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ un objet supersingulier tel que $\Pi^{\text{alg}} \neq 0$. Alors Π^{alg} est réductible si et seulement si $V(\Pi)$ est spéciale, dans quel cas Π^{alg} est une extension de W par $W \otimes \text{St}$ pour une certaine représentation algébrique W et où St est la représentation de Steinberg.

On vérifie aussi que V est spéciale si et seulement si V est potentiellement cristalline et si la représentation de Weil–Deligne associée à $D_{\text{pst}}(V)$ est une somme directe de deux caractères δ_1, δ_2 , avec $\delta_1/\delta_2 \in \{|x|, |x|^{-1}\}$.

Si V est une représentation galoisienne, on identifie librement les déformations de V à $L[\varepsilon]$ et les extensions de V par lui-même. Si $\det V = \zeta$, on dit qu'une telle déformation V_1 de V a déterminant ζ si $\det_{L[\varepsilon]}(V_1) = \zeta$.

DÉFINITION 7.16. Soit ζ un caractère unitaire et soit V une L -représentation de de Rham, telle que $\det V = \zeta$. On note $\text{Ext}_{g,\zeta}^1(V, V)$ le sous-espace de $\text{Ext}^1(V, V)$ engendré par les déformations de V à $L[\varepsilon]$, qui ont déterminant ζ et qui sont de de Rham.

PROPOSITION 7.17. Soit ζ un caractère unitaire et soit V une L -représentation absolument irréductible, de de Rham, à poids de Hodge–Tate distincts et telle que $\det V = \zeta$. Alors $\dim_L \text{Ext}_{g,\zeta}^1(V, V) = 1$ sauf si V est spéciale, auquel cas $\dim_L \text{Ext}_{g,\zeta}^1(V, V) = 2$.

Démonstration. On pose $W = \text{ad}^0(V)$, sous-espace de $\text{End}(V)$ formé des endomorphismes de trace nulle. On a donc un isomorphisme de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ -représentations $V \otimes V^* = W \oplus 1$. Il découle de la proposition 1.26 de [Nek93] et de sa preuve²⁵ que l'on a un isomorphisme

$$\text{Ext}_{g,\zeta}^1(V, V) \simeq H_g^1(\mathbf{Q}_p, W),$$

où $H_g^1(\mathbf{Q}_p, W)$ désigne le groupe de cohomologie introduit par Bloch–Kato [BK90], classifiant les extensions de \mathbf{Q}_p par W qui sont de de Rham. Un calcul standard utilisant l'exponentielle de Bloch–Kato et l'exponentielle duale de Kato montre (voir par exemple la proposition 1.24 de [Nek93]) que

$$\dim H_g^1(\mathbf{Q}_p, W) = \dim H^0(\mathbf{Q}_p, W) + \dim(D_{\text{dR}}(W)/D_{\text{dR}}^+(W)) + \dim D_{\text{cris}}(W^*(1))^{\varphi=1}.$$

Puisque V est absolument irréductible, on a $H^0(\mathbf{Q}_p, W) = 0$. Ensuite,

$$D_{\text{dR}}^+(V \otimes V^*) = \{f \in \text{End}(D_{\text{dR}}(V)) \mid f(\text{Fil}^i(D_{\text{dR}}(V))) \subset \text{Fil}^i(D_{\text{dR}}(V)), \forall i \in \mathbf{Z}\}.$$

Comme les poids de Hodge–Tate de V sont distincts et $\dim V = 2$, on obtient $\dim D_{\text{dR}}^+(V \otimes V^*) = 3$, donc $\dim(D_{\text{dR}}(W)/D_{\text{dR}}^+(W)) = 1$. La proposition est donc équivalente à l'assertion suivante : $D_{\text{cris}}(V \otimes V^*)^{\varphi=p} = 0$ sauf si V est spéciale, dans quel cas $D_{\text{cris}}(V \otimes V^*)^{\varphi=p}$ est de dimension 1.

Supposons que V n'est pas trianguline et considérons une extension finie K de \mathbf{Q}_p telle que V devienne semistable sur K . Puisque V n'est pas trianguline, la représentation de Weil–Deligne associée à $D_{\text{pst}}(V)$ est irréductible, donc V devient cristalline sur K . Alors, en posant $D_{\text{cris}}^K = (B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)}$, on a

$$D_{\text{cris}}(V \otimes V^*)^{\varphi=p} \simeq (D_{\text{cris}}^K \otimes (D_{\text{cris}}^K)^*)^{\text{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi=p}$$

et ce dernier espace est nul, puisque φ a une base de vecteurs propres avec des valeurs propres de même valuation p -adique (cela découle de l'irréductibilité de la représentation de Weil–Deligne associée à $D_{\text{pst}}(V)$, ou par contemplation des formules de [GM09]). On en déduit le résultat dans ce cas.

Supposons donc que V est trianguline. Si V est une tordue d'une représentation semi-stable non cristalline, on peut supposer que V est semi-stable, et alors

$$D_{\text{cris}}(V \otimes V^*)^{\varphi=p} = (D_{\text{st}}(V) \otimes D_{\text{st}}(V)^*)^{N=0, \varphi=p}.$$

Dans ce cas, le § 3.1 de [GM09] montre que $D_{\text{st}}(V)$ a une base dans laquelle les matrices de φ et N sont $\varphi = \begin{pmatrix} p/\alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie alors sans mal que $(D_{\text{st}}(V) \otimes D_{\text{st}}(V)^*)^{N=0, \varphi=p} = 0$.

Enfin, supposons que V est une tordue d'une représentation devenant cristalline sur une extension abélienne de \mathbf{Q}_p , on vérifie en utilisant les formules dans la définition 2.4.4 de [BB10] et dans la proposition 2.4.5 de [BB10] que $D_{\text{cris}}(V \otimes V^*)^{\varphi=p} = 0$, sauf si V est spéciale, dans quel cas c'est un espace de dimension 1. □

Remarque 7.18. La non nullité de $D_{\text{cris}}(V \otimes V^*)^{\varphi=p}$ équivaut à l'existence d'une extension $0 \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow V \rightarrow 0$ qui est de de Rham, mais pas cristalline. Si V devient cristalline sur une extension K (forcément abélienne d'après le théorème précédent), alors E est semi-stable et non cristalline sur K .

²⁵ Les extensions de V par lui-même sont classifiées par $H^1(\mathbf{Q}_p, V \otimes V^*)$, et correspondent aux $L[\varepsilon] = L[t]/t^2$ -déformations de V , alors que les extensions dont le déterminant [en tant que $L[\varepsilon] = L[t]/t^2$ -module] est $\det V$ sont classifiées par $H^1(\mathbf{Q}_p, W)$. Les conditions venant de la théorie de Hodge p -adique se correspondent à travers ces identifications comme le montre la preuve de [Nek93].

REMERCIEMENTS

Il sera évident au lecteur combien cet article doit aux travaux de Pierre Colmez et Vytautas Paškūnas. Je les remercie pour m'avoir posé la question dont la réponse fait l'objet de cet article, ainsi que pour des discussions très enrichissantes autour de cette question. Merci à Laurent Berger et à Pierre Colmez pour m'avoir aidé à simplifier la preuve de la proposition 7.17. Une bonne partie de ce papier a été rédigée pendant un séjour au Beijing International Center for Mathematical Research en novembre 2012, et je voudrais remercier Ruochuan Liu pour l'invitation et les excellentes conditions de travail. Enfin, je remercie les rapporteurs pour des remarques utiles et pour m'avoir épargné un certain nombre d'assertions douteuses et de fautes de frappe.

REFERENCES

- Ber02 L. Berger, *Représentations p -adiques et équations différentielles*, Invent. Math. **148** (2002), 219–284.
- Ber08 L. Berger, *Équations différentielles p -adiques et (φ, N) -modules filtrés*, Astérisque **319** (2008), 13–38.
- BB10 L. Berger and C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $G_{\mathbf{Q}_p}$* , Astérisque **330** (2010), 155–211.
- BK90 S. Bloch and K. Kato, *L -functions and Tamagawa numbers of motives*, in *The Grothendieck festschrift, Vol. I*, Progress in Mathematics, vol. 86 (Birkhäuser, Boston, MA, 1990), 333–400.
- Bre04 C. Breuil, *Invariant L et série spéciale p -adique*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **37** (2004), 559–610.
- BM02 C. Breuil and A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de $GL_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $Gal(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ en $l = p$ (avec un appendice par G. Henniart)*, Duke Math. J. **115** (2002), 205–310.
- BM14 C. Breuil and A. Mézard, *Multiplicités modulaires raffinées*, Bull. Soc. Math. France **142** (2014), 127–175.
- CC98 F. Cherbonnier and P. Colmez, *Représentations p -adiques surconvergentes*, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.
- Col98 P. Colmez, *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), 485–571.
- Col08 P. Colmez, *Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham*, Astérisque **319** (2008), 117–186.
- Col10a P. Colmez, *(φ, Γ) -modules et représentations du mirabolique de G* , Astérisque **330** (2010), 61–153.
- Col10b P. Colmez, *Représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque **330** (2010), 281–509.
- Col11 P. Colmez, *La série principale unitaire de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques*, Proceedings of the Durham LMS Symposium (2011), to appear.
- CD14 P. Colmez and G. Dospinescu, *Complétés universels de représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$* , Algebra Number Theory **8** (2014), 1447–1519.
- CDP14a P. Colmez, G. Dospinescu and V. Paškūnas, *The p -adic local Langlands correspondence for $GL_2(\mathbf{Q}_p)$* , Cambridge J. Math. **2** (2014), 1–47.
- CDP14b P. Colmez, G. Dospinescu and V. Paškūnas, *Irreducible components of deformation spaces: wild 2-adic exercises*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2014** (2014); doi:[10.1093/imrn/rnu089](https://doi.org/10.1093/imrn/rnu089).
- Dos12a G. Dospinescu, *Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p -adique pour $GL_2(\mathbf{Q}_p)$* , Math. Ann. **354** (2012), 627–657.
- Dos12b G. Dospinescu, *Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p -adique*, PhD thesis, École Polytechnique (2012).

- Eme06 M. Emerton, *A local-global compatibility conjecture in the p -adic Langlands programme for GL_2/\mathbf{Q}* , Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), 279–393.
- Eme(a) M. Emerton, *Local-global compatibility in the p -adic Langlands programme for GL_2/\mathbf{Q}* , Preprint, <http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html>.
- Eme(b) M. Emerton, *Locally analytic vectors in representations of locally p -adic analytic groups*, Mem. Amer. Math. Soc., to appear, <http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html>.
- Fon82 J.-M. Fontaine, *Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti–Tate*, Ann. of Math. (2) **115** (1982), 529–577.
- Fon90 J.-M. Fontaine, *Représentations p -adiques des corps locaux. I*, in *The Grothendieck festschrift, Vol II*, Progress in Mathematics, vol. 87 (Birkhäuser, Boston, MA, 1990), 249–309.
- GM09 E. Ghate and A. Mézard, *Filtered modules with coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 2243–2261.
- Kis09 M. Kisin, *The Fontaine–Mazur conjecture for GL_2* , J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 641–690.
- LXZ12 R. Liu, B. Xie and Y. Zhang, *Locally analytic vectors of unitary principal series of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$* , Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **45** (2012), 167–190.
- Nek93 J. Nekovar, *On p -adic height pairings*, in *Séminaire de théorie des nombres, Paris, 1990–91, 127–202*, Progress in Mathematics, vol. 108 (Birkhäuser, Boston, MA, 1993).
- Paš12 V. Paškūnas, *On the Breuil–Mézarid conjecture*, Preprint (2012), [arXiv:1209.5205](https://arxiv.org/abs/1209.5205).
- Paš13 V. Paškūnas, *The image of Colmez’s Montréal functor*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 1–191.
- ST02 P. Schneider and J. Teitelbaum, *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. **127** (2002), 359–380.
- ST03 P. Schneider and J. Teitelbaum, *Algebras of p -adic distributions and admissible representations*, Invent. Math. **153** (2003), 145–196.
- Sen81 S. Sen, *Continuous cohomology and p -adic Galois representations*, Invent. Math. **62** (1980/1981), 89–116.

Gabriel Dospinescu gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr

CNRS UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d’Italie, 69007 Lyon, France