Composito Mathematica **123:** 73–88, 2000.

Revêtements des courbes en caractéristique $p > 0$ et ordinarité

(*Coverings of curves in characteristic* p > 0 *and ordinariness*)

MICHEL RAYNAUD
Université de Paris-Sud, Mathématique, bât. 425, URAD0752 du CNRS, 91405 Orsay Cedex, France. e-mail: michel.raynaud@math.u-psud.fr

(Received: 9 November 1998; in final form: 8 March 1999)

Abstract. Let X be a proper, smooth, connected curve, defined over an algebraically closed field of characteristic $p > 0$ and of genus $g \geqslant 2$. We show that there exists a finite solvable group G, of order prime to p, and a Galois étale cover $Y \to X$, with Galois group G, which is not ordinary.

Mathematics Subject Classifications (2000): 14Hxx, 14Kxx, 20Dxx.

Key words: algebraic curves in characteristic $p > 0$, theta divisor, representations of finite nilpotent groups.

Introduction

On sait, d'après Nakajima [Na 1], qu'en caractéristique $p > 0$, tout revêtement étale abélien d'une courbe propre et lisse, géométriquement connexe, générique de genre $g \geqslant 2$, est ordinaire. Dans cet article nous étudions les revêtements étales galoisiens de groupe G un groupe nilpotent, extension centrale de deux groupes abéliens. Nous montrons que si l'ordre de G est premier à $g!$, tout revêtement de groupe G de la courbe générique de genre g, est ordinaire (théorème 14). Par contre lorsque l'ordre de G n'est plus premier à $g!$, il peut exister des revêtements de groupe G de la courbe générique de genre g (et donc aussi de toute courbe de genre g) qui ne sont pas ordinaires. L'exemple de base, modulo quelques contraintes numériques secondaires, est fourni par un groupe d'Heisenberg dont la forme commutateur est le cup produit à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est premier à p et divise g (théorème 17). De là on déduit que, pour toute caractéristique $p > 0$ et tout genre $g \geqslant 2$, il existe un groupe fini G résoluble, d'ordre premier à p, tel que toute courbe de genre g en caractéristique p, admette un revêtement étale galoisien de groupe G qui n'est pas ordinaire (Théorème 2).

Je remercie A. Tamagawa et le (la) referee pour leurs remarques et suggestions.

https://doi.org/10.1023/A:1001840726893 Published online by Cambridge University Press

1. Représentations et Diviseurs Thêta

Soit X une courbe propre lisse et connexe de genre g, définie sur un corps k de caractéristique $p \geqslant 0$. Soit ρ une représentation continue d'image finie du groupe fondamental $\pi_1(X)$ dans un k-vectoriel de dimension r. Nous dirons simplement que ρ est une représentation finie de $\pi_1(X)$ de rang r. On lui associe, de la facon habituelle, un faisceau sur X en k-vectoriels de dimension r, faisceau pour la topologie étale noté $\mathbb{V}_\rho$. On en déduit un fibré vectoriel sur X de rang r : $V_\rho = \mathbb{V}_\rho \otimes_k 0_X$. Alors V_ρ est un fibré semi-stable de pente 0 (rappelons que la pente λ d'un fibré vectoriel non nul est le nombre rationnel, quotient du degré par le rang).

Supposons $p > 0$ et soit $\pi : X \to X^1$, le k-morphisme radiciel de degré p qui est le Frobenius relatif. Notons B^1 le faisceau sur X^1 des différentielles localement exactes. C'est un fibré vectoriel de rang $p-1$, de pente $g-1$, qui s'insère dans la suite exacte courte :

$$0 \to 0_{X^1} \to \pi_*(0_X) \to B^1 \to 0 .$$

Soit ρ une représentation finie de $\pi_1(X)$. L'isomorphisme naturel $\pi_1(X) \approx \pi_1(X^1)$, fait que $\mathbb{V}_\rho$ et V_ρ se descendent canoniquement en $\mathbb{V}^1_\rho$ et V^1_ρ sur X^1 et que l'on a une suite exacte de fibrés sur X^1 :

$$0 \to V^1_\rho \to \pi_*(V_\rho) \to \mathbb{V}^1_\rho \otimes_k B^1 \to 0 .$$

On vérifie facilement que l'application naturelle déduite de $\pi : H^0(X^1, V^1_\rho) \to H^0(X, V_\rho)$ est bijective. Il en résulte que $H^1(X^1, V^1_\rho) \to H^1(X, V_\rho)$ est injective si et seulement si $H^0(X^1, \mathbb{V}^1_\rho \otimes_k B^1) = 0$. Si cette condition est réalisée, nous dirons que ρ est une **représentation ordinaire**. Ainsi la représentation triviale est ordinaire si et seulement si la courbe X est ordinaire au sens usuel.

Notons J (resp. J^1) la jacobienne de X (resp. X^1) et soit $L_{d,\mathrm{gen}}$ un faisceau inversible général sur X^1 de degré d. Rappelons que si E est un fibré sur X^1 de pente $g-1$, il a une caractéristique d'Euler Poincaré nulle, et il en est de même de $E \otimes L_{o,\mathrm{gen}}$. Si de plus $H^0(X^1, E \otimes L_{o,\mathrm{gen}}) = 0$, on associe canoniquement à E un diviseur θ_E, qui est un diviseur positif sur J^1, déterminant de la cohomologie universelle [Ra].

Si ρ est une représentation finie de $\pi_1(X)$, de rang r, le fibré $\mathbb{V}^1_\rho \otimes_k B^1$ est de pente $g-1$ et de rang $r(p-1)$. S'il a un diviseur thêta, noté θ_ρ, nous dirons que la représentation ρ a un diviseur thêta. D'après [Ra] le fibré B^1 admet un diviseur thêta, noté θ_X. Autrement dit θ_X est le diviseur thêta associé à la représentation triviale.

PROPOSITION 1. *Sorite du diviseur thêta d'une représentation. On suppose k algébriquement clos.*

(1) *Une représentation finie ρ est ordinaire si et seulement si elle admet un diviseur thêta et si l'origine de J^1 n'est pas dans le support de θ_ρ.*

(2) *Une représentation ρ admet un diviseur thêta si et seulement si pour toute représentation χ de $\pi_1(X)$, de degré* 1 *et assez générale, $\rho \otimes \chi$ est ordinaire.*

(3) *Si ρ est extension de ρ'' par ρ', ρ admet un diviseur thêta si et seulement si ρ'' et ρ' admettent des diviseurs thêta et l'on a $\theta_\rho = \theta_{\rho'} + \theta_{\rho''}$.*

(4) *Soit $a : Y \to X$ un revêtement fini étale irréductible et notons $a'^1 : J(X^1) \to J(Y^1)$, l'application entre les jacobiennes, déduite de a. Soit ρ une représentation finie de $\pi_1(Y)$ et* $\mathrm{Ind}(\rho)$ *la représentation de $\pi_1(X)$, déduite de ρ par induction de $\pi_1(Y)$ à $\pi_1(X)$. Alors $V_{\mathrm{Ind}(\rho)}$ s'identifie à $a_*(V_\rho)$. Pour que* $\mathrm{Ind}(\rho)$ *ait un diviseur thêta, il faut et il suffit que ρ ait un diviseur thêta et que son support ne contienne pas $a'^1(J(X^1))$. Alors $\theta_{\mathrm{Ind}(\rho)} = (a'^1)^*(\theta_\rho)$. En particulier ρ est ordinaire si et seulement si* $\mathrm{Ind}(\rho)$ *est ordinaire.*

(5) *Sous les conditions de* (4), *supposons de plus $a : Y \to X$ galoisien de groupe G. Pour que toute représentation finie de G admette un diviseur thêta, il faut et il suffit que θ_Y ne contienne pas $a'^1(J(X^1))$.*

(6) *Pour toute représentation finie ρ de $\pi_1(X)$, il existe une représentation finie ρ' de $\pi_1(X)$ telle que $\rho \otimes \rho'$ soit ordinaire et en particulier admette un diviseur thêta (comparer avec* [Fa] *et* [LP]).

(7) *Soit ρ une représentation finie de rang r de $\pi_1(X)$, et soit* $\det(\rho)$ *son déterminant. Alors $V(\rho)^1_{\det(\rho)}$ est un faisceau inversible sur X^1, d'ordre fini premier à p, qui définit un point z de la jacobienne J^1. Soit z' un point de J^1 tel que $rz' = z$. Alors, si ρ admet un diviseur thêta, celui-ci est un diviseur sur J^1 linéairement équivalent au translaté de $r\theta_X$ par $-z'$.*

Démonstration: Seuls les points (6) et (7) ne sont pas formels.

Pour établir (6), considérons un revêtement fini étale connexe $a : Y \to X$, galoisien de groupe G, qui trivialise ρ. Soit χ un caractère de rang 1 de $\pi_1(Y)$, assez général pour que tous ses transformés ${}^g\chi$ par les éléments de G, soient ordinaires. Alors $\rho \otimes_k \mathit{Ind}_Y^X(\chi)$ est ordinaire : en effet, sa restriction à $\pi_1(Y)$ est la somme directe de r copies de $\oplus_{g\in G}\, {}^g\chi$, où r est le rang de ρ, donc est ordinaire.

Prouvons (7). Soient R les vecteurs de Witt à coefficients dans k et soit K le corps des fractions de R, qui est donc de caractéristique 0. Déformons X en une courbe X_R propre et lisse sur R et soit J_R la jacobienne relative de X_R. Fixons un faisceau inversible L sur X_R de degré $g-1$ et soit r un entier. Considérons le champ C des fibrés vectoriels sur X_R de rang r, de déterminant L^r. C'est un champ lisse sur R, à fibres géométriques connexes. Soit U l'ouvert de C, couvrant R, formé des fibrés qui admettent un diviseur thêta. Ce diviseur thêta définit un morphisme $u : U \to \mathrm{Pic}(J_R)$. D'après $[D-N]$, le groupe de Picard de U_K est discret. Il en résulte que u_K est constante et donc u et u_k sont constantes. Par suite, toutes les représentations ρ de $\pi_1(X)$, de rang r, de déterminant trivial, qui admettent des diviseurs thêta, ont des diviseurs thêta linéairement équivalents. Prenant pour ρ r fois la représentation triviale, on trouve que θ_ρ est alors linéairement équivalent à $r\theta_X$. Le cas général, s'en déduit immédiatement par torsion par un faisceau inversible, racine r-ème du déterminant de V^1_ρ.

THÉORÈME 2. *Soient $g \geqslant 2$ et p premier. Il existe un groupe fini G (ne dépendant que de g et de p) résoluble d'ordre permier à p, tel que si X est une courbe propre lisse connexe de genre g, définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p, les conditions suivantes sont réalisées:*

(i) *Il existe un revêtement étale connexe $Y \to X$ galoisien de groupe G.*
(ii) *Il existe une représentation ρ de $\pi_1(X)$, se factorisant à travers G, qui n'admet pas de diviseur thêta.*

A fortiori, *Y n'est pas ordinaire.*

Remarque 3. L'énoncé précédent s'applique en particulier, (g, p) étant fixés, au cas où l'on choisit la courbe X générique. Sauf erreur, on ne connaissait pas de revêtements étales de la courbe générique qui n'étaient pas ordinaires, mais bien sûr, il n'est pas du tout surprenant qu'il en existe.

Le théorème 2 sera établi dans la section 3. Dans la section 2, nous allons utiliser dégénérescence et monodromie pour construire des revêtements de la courbe générique qui sont au contraire ordinaires.

Les diviseurs thêta associés aux représentations sont étroitement liés aux faisceaux inversibles sur X, ou encore aux représentations de rang 1 du π_1. Il n'est donc pas étonnant qu'ils se comportent mal par produit tensoriel. En voici une illustration.

PROPOSITION 4. *Soient (g,p,X) comme dans le théorème 2. Il existe des représentations finies ρ et ρ' de $\pi_1(X)$ qui ont des diviseurs thêta, telles que $\rho \otimes \rho'$ n'ait pas de diviseur thêta.*

En effet considérons $Y \to X$ galoisien de groupe G comme dans le théorème 2. Puisque Y admet un diviseur thêta, on peut trouver une représentation χ de $\pi_1(Y)$, de rang 1, telle que χ et $\chi^{-}1$ soient ordinaires. Soient ρ et ρ' les représentations de $\pi_1(X)$ déduites de χ et $\chi^{-}1$ par induction de $\pi_1(Y)$ à $\pi_1(X)$. Alors ρ et ρ' sont ordinaires (prop. 1.4)) et en particulier admettent des diviseurs thêta. On a une application canonique surjective de $\rho \otimes \rho' = Ind(\chi) \otimes \mathrm{Ind}(\chi^{-}1) \to (\chi \otimes \chi^{-}1)$, qui montre que la représentation régulière de G est un quotient de $\rho \otimes \rho'$. Vu le choix de G, la représentation régulière de G n'a pas de diviseur thêta sur X ; a fortiori, il en est de même de $\rho \otimes \rho'$.

2. Exemples de Revêtements Ordinaires de la Courbe Générique

Soit S le schéma de Hilbert sur $\mathbb{Z}$ des courbes stables de genre $g \geqslant 2$ plongées dans un espace projectif convenable par le plongement tricanonique. C'est un schéma lisse sur $\mathbb{Z}$, à fibres géométriques irréductibles [D-M], de sorte qu'en toute caractéristique on dispose d'une courbe générique de genre g, que l'on peut faire dégénérer.

Soit p premier et soit η le point générique de $S \times \mathbb{F}_p$, de corps résiduel k, et soit X_η la courbe stable au-dessus de η et J_η sa jacobienne. Choisissons un entier $n > 0$ premier à p et soit ${}_nJ_\eta$ le noyau de l'élévation à la puissance n dans J_η. Alors, ${}_nJ_\eta$ est localement pour la topologie étale isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ et est équipé d'un cup produit $<,>$ qui est une forme bilinéaire alternée non dégénérée à valeurs dans μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Par suite le groupe de Galois de la clôture algébrique $\overline{k}$ de k, agit sur ${}_nJ_\eta$ à travers le groupe des similitudes symplectiques de la forme cup-produit et il est connu que pour la courbe générique, l'image de Galois contient $Sp_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ([D-M]-[Ek]).

Considérons R un anneau de valuation discrète strictement hensélien et un morphisme $u:\mathrm{Spec}(R)\to S$, tel que le point générique de $\mathrm{Spec}(R)$ s'envoie sur η et le point spécial s'envoie sur un point de S correspondant à une fibre convenablement dégénérée. Notons X_R la courbe stable sur R, image réciproque par u, de la courbe stable universelle. Soit K le corps des fractions de R, X_K la fibre générique qui est donc une courbe générique de genre g et $\underline{X}$ la fibre spéciale de X_R.

LEMMA 5. *Soient $\underline{X}_i$, $i\in I$, les composantes irréductibles de $\underline{X}$. Supposons que les $\underline{X}_i$ soient lisses et que le graphe de $\underline{X}$ soit un arbre. Soit n un entier inversible dans R. Notons A (resp. A_i) le noyau de la multiplication par n dans la jacobienne de X_R resp. X_i), équipé de son cup produit (resp. $<,>_i$). Alors A est constant sur R, somme directe des A_i, $i\in I$. De plus A muni du cup produit $<,>$ sur la fibre générique est la somme directe orthogonale des A_i munis du cup produit $<,>_i$.*

La dernière assertion provient du fait que le degré total sur $\underline{X}$ d'un faisceau inversible est la somme des degrés partiels sur chacun des $\underline{X}_i$.

(*Rappel 1*). Tout revêtement étale galoisien d'une courbe ordinaire de groupe un p-groupe est ordinaire [Cr].

(*Rappel 2*). Tout revêtement abélien d'une courbe générique de genre g est ordinaire ([Na] [Zh]).

Ceci étant, choisissons R et X_R de façon que la fibre spéciale $\underline{X}$ ait deux composantes irréductibles se coupant en un point : une courbe $\underline{X}'$ de genre $g-1$ et une courbe elliptique $\underline{E}''$. On suppose de plus $\underline{E}''$ et $\underline{X}'$ génériques.

PROPOSITION 6. *Soient X une courbe générique de genre g en caractéristique $p>0$ et n un entier premier à p. Soit G un groupe fini extension d'un groupe abélien B par un groupe abélien C. On suppose que B est libre de rang 2 sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que le cup produit $<,>$ est non dégénéré sur B. Alors tout revêtement étale de X, de groupe G, est ordinaire.*

Remarque 7. Le groupe B est a priori un quotient du groupe A, noyau de la multiplication par n dans la jacobienne J de X. Grâce au cup-produit $<,>$, A est autodual pour la dualité à valeurs dans μ_n et B s'identifie aussi à un sous-groupe de A.

COROLLAIRE 8. *Soit X comme dans la prop. 6 et soit $Y\to X$ un revêtement fini étale, galoisien de groupe G, où G est extension d'un groupe cyclique d'ordre n premier à p, par un groupe abélien. Alors Y est ordinaire.*

https://doi.org/10.1023/A:1001840726893 Published online by Cambridge University Press

En effet, un sous-groupe cyclique d'ordre n de A est contenu dans un sous-groupe B de A, libre de rang 2 sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sur lequel le cup-produit est non dégénéré. Donc quitte à agrandir G, on est ramené au cas où G est du type décrit dans la proposition 6.

Démonstration de la proposition 6. D'après le rappel 1, on peut supposer que C donc G est d'ordre premier à p.

Si X est une courbe définie sur le corps k, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ opère par automorphismes externes sur le π_1 géométrique $\pi_1(X_{\overline{k}})$. Nous appellerons cette action la monodromie. Par transport de structure, la monodromie transforme un revêtement galoisien ordinaire de $X_{\overline{k}}$, en un autre revêtement ordinaire.

Dans le cas présent, où X est une courbe générique, l'image de la monodromie agissant sur le quotient abélien A du $\pi_1(X_{\overline{k}})$, contient le groupe symplectique relatif au cup produit $<,>$. Par ailleurs, la dégénérescence X_R de X_K fournit une décomposition orthogonale de A en $A' \times A''$, où A' et A'' sont les noyaux respectifs de l'élévation à la puissance n dans les jacobiennes de $\underline{X}'$ et $\underline{E}''$ (Lemme 5). Comme le groupe symplectique de $(A, <,>)$ agit transitivement sur les sous–$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$modules libres de rang 2 de A, sur lesquels $<,>$ est non dégénéré, on peut supposer, quitte à transformer G par la monodromie, que le quotient B de G est égal à A''.

Sur la fibre générique, le revêtement de X_K de groupe G, se factorise en $Y_K \to X_K$ de groupe B, et $Z_K \to Y_K$ de groupe C.

Comme $J(X_K)$ a bonne réduction, $Y_K \to X_K$ se prolonge en un revêtement étale de groupe $B : Y_R \to X_R$. Vu le choix de B, sur la fibre spéciale, $\underline{Y} \to \underline{X}$ est décomposé au-dessus de $\underline{X}'$ et est irréductible au-dessus de $\underline{E}''$. En particulier le graphe de $\underline{Y}$ est un arbre, constitué de la courbe elliptique générique $\underline{E}''$ sur laquelle se branche n^2 copies de la courbe générique $\underline{X}'$, de genre $g-1$.

Alors la jacobienne $J(Y_K)$ a, à son tour, bonne réduction sur R et par suite le revêtement abélien de groupe C, d'ordre premier à $p : Z_K \to Y_K$, s'étend en un revêtement étale abélien $Z_R \to Y_R$, de groupe C. Sur la fibre spéciale $\underline{Z}$ est une courbe semi-stable dont les composantes sont des revêtements abéliens des courbes génériques $\underline{X}'$ et $\underline{E}''$ et par suite sont ordinaires (rappel 2). Donc $\underline{Z}$ est une courbe semi-stable ordinaire et par générisation, Z_K est ordinaire.

Préliminaires sur les Groupes Nilpotents

Pour préparer la démonstration du théorème 14, nous allons étudier certains quotients nilpotents du π_1 d'une courbe de genre g.

Soient n un entier impair > 1, g un entier > 0, $\widetilde{A}$ un $\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$-module libre de rang $2g$. Notons A le noyau de la multiplication par n dans $\widetilde{A}$, de sorte que l'on a une suite exacte : $0 \to A \to \widetilde{A} \to A \to 0$. On définit sur le produit $\widetilde{A} \times \Lambda^2(A)$ une loi de groupe par la formule $(\widetilde{a}, u)(\widetilde{b}, v) = (\widetilde{a} + \widetilde{b}, u + v + (a\Lambda b)/2)$, où a (resp. b) désigne l'image de $\widetilde{a}$ (resp. $\widetilde{b}$) dans A. On obtient ainsi un groupe $\widetilde{N}$ extension centrale de A par $A \oplus \Lambda^2 A$. L'application commutateur est l'application canonique:

$$\begin{aligned} &A \times A \to \Lambda^2 A \\ &(a, b) \mapsto [\widetilde{a}, \widetilde{b}] = a\Lambda b \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1001840726893 Published online by Cambridge University Press

En remplacant dans la construction précédente $\widetilde{A}$ par son quotient A, on obtient un autre groupe nilpotent N, quotient de $\widetilde{N}$, qui est l'extension d'Heisenberg universelle de A par $\Lambda^2(A)$, dans laquelle l'élévation à la puissance n-ième est triviale. Le groupe $\widetilde{N}$ apparaît alors comme produit fibré de $\widetilde{A}$ et N dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} & \to & \widetilde{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \to & A\,. \end{array}$$

Le groupe $\widetilde{N}$ est l'extension centrale de A par B solution du problème universel suivant:

(i) $\widetilde{N}$ est engendré par des éléments qui relèvent une famille de générateurs de A.
(ii) B est annulé par n.

Appelons extension d'Heisenberg élémentaire de A, une extension centrale H de A par un groupe cyclique C d'ordre n, telle que l'application commutateur $A \times A \to C : (a, b) \mapsto (a, b)$ soit surjective. Si H est une extension d'Heisenberg élémentaire de A par C, il existe un unique morphisme de groupes $h : \widetilde{N} \to H$ et des applications additives uniques :

$\lambda : A \to C$, et ϕ surjective : $\Lambda^2 A \to C$, telles que $(a, b) = \phi(a\Lambda b)$ et que l'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & A \times \Lambda^2 A & \to & \widetilde{N} & \to & A & \to & 1 \\ & & (\lambda, \phi)\downarrow & & h\downarrow & & \| & & \\ 1 & \to & C & \to & H & \to & A & \to & 1 \end{array} \tag{1}$$

Considérons la donnée supplémentaire d'un cup produit $<, \widetilde{>}$ sur $\widetilde{A}$, c'est-à-dire d'une forme alternée non dégénérée à valeurs dans μ_{n^2} et notons $<, >$ le cup produit sur A à valeurs dans μ_n qui s'en déduit par passage au quotient. Choisissons une racine primitive n-ième de 1 soit ζ et une base symplectique $\{e_i, f_j\}$, $i = 1, \ldots, g$ sur A, telle que $<e_i, f_j> = \zeta$. Finalement choisissons des revêtements arbitraires $\widetilde{e}_i$ et $\widetilde{f}_i$ de e_i et f_i dans $\widetilde{A}$. On a donc dans $\widetilde{N} : [(\widetilde{e}_i, 0), (\widetilde{f}_i, 0)] = e_i \Lambda f_i$ pour $i = 1, \ldots, g$. Soit $\epsilon = \sum_{i=1}^{g} e_i \Lambda f_i$ et notons $< \epsilon >$ le sous-groupe cyclique d'ordre n de $\Lambda^2 A$ engendré par ϵ. Remarquons que $< \epsilon >$ ne dépend pas du choix de la base symplectique $\{e_i, f_j\}$. En effet le cup produit définit un isomorphisme $A \approx \mathrm{Hom}(A, \mu_n)$ ainsi qu'une application linéaire $\phi_{<>} : \Lambda^2(A) \to \mu_n$ telle que $< a, b > = \phi(a\Lambda b)$. En prenant le dual de cette flèche à valeurs dans $\mu_n^{\otimes 2}$, on obtient une application canonique:

$$\mu_n \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2(A), \mu_n^{\otimes 2}) \approx \Lambda^2(A)\ ,$$

dont on vérifie immédiatement que l'image est $< \epsilon >$. En particulier le groupe des similitudes symplectiques CSp de $\widetilde{A}$ agit de facon naturelle sur $\widetilde{N}$ et N à travers son action naturelle sur $\widetilde{A}$ et $\Lambda^2 A$, en laissant stable $< \epsilon >$.

Soit maintenant X une courbe propre et lisse de genre g sur un corps algébriquement clos k de car. $p > 0$. Supposons que $(n, p) = 1$, que $\widetilde{A}$ est le groupe des points d'ordre n^2 de la jacobienne de X et que $\widetilde{<,>}$ est le cup produit naturel. Considérons le plus grand quotient $\widetilde{M}$ de $\pi_1(X)$ qui est une extension centrale de A par un groupe abélien annulé par n. Alors $\widetilde{M}$ est le quotient de $\widetilde{N}$ par la relation $\prod_{i=1}^{g}[(\widetilde{e}_i, 0), (\widetilde{f}_i, 0)] = 1$. Or $\prod_i[(\widetilde{e}_i, 0), (\widetilde{f}_i, 0)] = \sum_i e_i \Lambda f_i = \epsilon$. Donc on peut prendre $\widetilde{M} = \widetilde{N}/ < \epsilon >$.

COROLLAIRE 9. *Soient H une extension d'Heisenberg élémentaire de A par C et $h : \widetilde{N} \to H$ la surjection canonique associée à H comme dans* (1). *Alors, pour que h se factorise à travers $\widetilde{M}$ il faut et il suffit que $\phi(\epsilon) = 0$.*

COROLLAIRE 10. *Soit $H_{<>}$ une extension d'Heisenberg de A par μ_n dont l'application commutateur est le cup-produit $<,>: A \times A \to \mu_n$. Alors la forme linéaire correspondante ϕ est $\phi_{<>} : a\Lambda b \mapsto <a, b>$ et l'on a : $\phi_{<>}(\epsilon) = g\zeta$. Par suite $H_{<>}$ est un quotient de $\widetilde{M}$ si et seulement si $n|g$.*

COROLLAIRE 11. *Supposons* $(n, g) = 1$. *Alors si H est une extension d'Heisenberg élémentaire quotient de $\widetilde{M}$, la forme commutateur $(\ ,\ )$ associée est une forme bilinéaire alternée étrangère à $<,>$ c'est-à-dire, pour tout q premier divisant n, $(\ ,\ )\otimes\mathbb{F}_q$ est non nulle et non proportionnelle à $<,> \otimes\mathbb{F}_q$).*

LEMME 12. *Soit* $(\ ,\ )$ *une forme bilinéaire alternée sur A d'image un groupe cyclique d'ordre n et qui est étrangère à $<,>$. Alors il existe e et f dans A tels que $(e, f) = 0$ et $< e, f >$ soit d'ordre n.*

Il suffit de le vérifier lorsque n est une puissance d'un nombre premier q. Considérons une base symplectique de A pour $(\ ,\ ) : \{a_i, b_i\}$, $i = 1, \ldots, g$ telle que $(a_i, b_i) = q^{m_i}$, où les m_i forment une suite croissante d'entiers $\geqslant 0$. On a donc $(a_1, b_1) = 1$, puisque l'image de $A \times A$ par $(\ ,\ )$ est d'ordre n.

Si l'un des $< a_i, b_j >$, ou $< a_i, a_j >$ ou $< b_i, b_j >$ pour $i \neq j$ est une unité, c'est terminé. Sinon, comme $<,>$ est non dégénérée, les $< a_i, b_i >$ sont des unités pour tout i. Comme $(\ ,\ )$ et $<,>$ sont étrangères, ces unités ne sont pas toutes congrues mod q.

Supposons d'abord $(\ ,\ )$ dégénérée. On a alors $g \geqslant 2$ et $m_g \geqslant 1$. Alors on peut prendre $e = e_1 + e_g$, $f = -q^{m_g} f_1 + f_g$.

Si maintenant $(\ ,\ )$ est non dégénérée, tous les (a_i, b_i) valent 1. Soient i et j deux indices tels que $< a_i, b_i >$ et $< a_j, b_j >$ ne soient pas congrus modulo q. On prend $e = a_i + a_j$, $f = -b_i + b_j$.

Application à la Courbe Générique

Reprenons maintenant le modèle semi-stable X_R dégénéré considéré plus haut dans la démonstration de la proposition 6. Alors le noyau A de la multiplication par n dans la jacobienne J_R de X_R, équipé de son cup-produit $<,>$ est somme directe orthogonale de $(A', <,>')$ et de $(A'', <,>'')$. Prenons une base symplectique $\{e_i, f_i\}$, $i = 1, \ldots, g-1$ de A' pour $<,>'$ (resp. une base symplectique $\{e_g, f_g\}$ de A'' pour $<,>''$. Alors $\{e_i, f_i\}$, $i = 1, \ldots, g$ est une base symplectique de A pour $<,>$ et $< e_i, f_i >= \zeta$ pour $i = 1, \ldots, g$.

Le groupe fondamental de X_R est égal à celui de la fibre fermée $\underline{X}$ (car R est strictement hensélien) et ce dernier est le produit libre $\pi_1(\underline{X}') * \pi_1(\underline{E}'')$. Le groupe $\pi_1(X_R)$ est aussi un quotient du groupe $\pi_1(X_{\overline{K}''})$ modérément ramifié au-dessus du point double de $\underline{X}$ ([Sa], [St]1). Nous allons décrire le plus grand quotient $\widetilde{L}$ du groupe $\widetilde{M}$ introduit plus haut, qui correspond à des revêtements non ramifiés de X_R. Posons $v = e_g \Lambda f_g$ et soit $< v >$ le sous-groupe de $\Lambda^2(A)$ engendré par v.

Ceci étant, quitte à faire une extension finie de R, on peut supposer qu'il existe un revêtement étale $Y_K \to X_K$ de groupe $\widetilde{M}$ et que celui-ci s'étend en un revêtement $Y \to X$ de groupe $\widetilde{M}$, modérément ramifié au-dessus du point double de $\underline{X}$ et étale en dehors.

PROPOSITION 13. *Le groupe d'inertie en un point au-dessus du point double de $\underline{X}$ est engendré par l'image de v dans $\widetilde{M}$. Autrement dit $\widetilde{L}$ est le quotient de $\widetilde{M}$ par l'image de $< v >$.*

Soit H une extension d'Heisenberg élémentaire, extension de A par un groupe cyclique C d'ordre n. Supposons que H soit un quotient de $\widetilde{M}$, donc correspond à un revêtement étale de $X_{\overline{K}}$. Pour que ce revêtement s'étende en un revêtement non ramifié de X_R (après extension finie éventuelle de R), il faut et il suffit, avec les notations de (1), que $\phi(v) = 0$.

En effet, pour décrire le quotient $\widetilde{M}$ de $\widetilde{N}$ comme groupe de Galois d'un revêtement modérément ramifié de X_R, il suffit d'introduire un générateur σ de l'inertie au-dessus du point double de $\underline{X}$ et de remplacer la relation $\prod_i [(\widetilde{e}_i, 0), (\widetilde{f}_i, 0)] = 1$ (pour $i = 1, \ldots, g$) par les deux relations :

$$\prod_i [(\widetilde{e}_i, 0), (\widetilde{f}_i, 0)]\sigma = 1 \text{ (produit pour } i = 1, \ldots, g-1)$$

$$\sigma^{-1}[(\widetilde{e}_g, 0), (\widetilde{f}_g, 0)] = 1 \ .$$

Quand on les traduit en notation additive dans $\Lambda^2 A$, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{g-1} e_i \Lambda f_i + \sigma = -\sigma + e_g \Lambda f_g = 0 \ .$$

En particulier l'image de v dans $\widetilde{M}$ engendre l'inertie. Les autres assertions s'en déduisent immédiatement.

https://doi.org/10.1023/A:1001840726893 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 14. *Supposons X générique de genre g en caractéristique $p > 0$. Soit $Y \to X$ un revêtement étale galoisien de groupe G, extension centrale de deux groupes finis abéliens. On suppose que l'ordre de G est premier à $g!$. Alors Y est ordinaire.*

Le groupe G est nilpotent, donc produit de ses sous-groupes de Sylow. Compte tenu du rappel 1, on peut supposer que G est d'ordre premier à p. On va procéder par récurrence sur g.

Pour $g = 1$, X est une courbe elliptique ordinaire. Alors Y est isogène à X donc aussi ordinaire.

Supposons $g \geqslant 2$ et l'assertion démontrée pour les genres $< g$. La condition que l'ordre de G est premier à $g!$ entraîne que l'ordre de G est impair. Par dévissage de la représentation régulière de G, il nous suffit de montrer que toute représentation irréductible ρ de G, dans un k-vectoriel est ordinaire. Quitte à passer au quotient, on peut supposer ρ fidèle. En particulier, on est ramené au cas où le centre de G est cyclique. Quitte à augmenter G, on est finalement ramené au cas où $G = H \times C'$ avec C' cyclique d'ordre n', H extension d'Heisenberg de A par C cyclique d'ordre n, avec $(n, n') = 1$, $(nn', pg!) = 1$, où A est le noyau de la multiplication par n dans la jacobienne de X. Il suffit de montrer que le revêtement Y de X, galoisien de groupe G, est ordinaire.

Reprenons les notations du préliminaire. Comme H est un quotient de $\widetilde{M}$ et que $(n, g) = 1$, la forme commutateur $(\,,)$ associée à H est étrangère à $<,>$ (corollaire 11). On peut donc trouver e et f dans A tels que $< e,f >= 1$ et $(e,f) = 0$ (Lemme 12).

Considérons de nouveau le modèle semi-stable dégénéré X_R utilisé ci-dessus et la base symplectique $\{(e_i,f_i\}$, $i = 1,\ldots,g$, réunion d'une base symplectique de A', $<,>'$ et d'une base symplectique de A'', $<,>''$.

LEMME 15. *Quitte à transporter G par la monodromie, on peut supposer que le revêtement $Y_K \to X_K$ étale de groupe G, se prolonge en un revêtement étale $Y_R \to X_R$ de groupe G.*

Comme la courbe X est générique, l'image de la monodromie agissant sur A contient le groupe symplectique associé à $<,>$. Celui-ci agit transitivement sur les couples d'éléments de base $\{e,f\}$ tels que $< e,f >= 1$. Quitte à transporter G par la monodromie, on peut donc supposer que $(e_g,f_g) = 0$ (Lemme 12). D'après le lemme 13, le groupe d'Heisenberg H, quotient de $\pi_1(X_K)$ correspond alors à un revêtement étale de X_R (après extension finie éventuelle de R). On a $G = H \times C'$ où C' est cyclique d'ordre n' premier à p. Comme la jacobienne J_R de X_R a bonne réduction, le groupe C' correspond aussi à un revêtement étale de X_R. Finalement $Y_K \to X_K$ se prolonge en un revêtement étale de groupe G: $Y_R \to X_R$. D'où le lemme.

Considérons la fibre spéciale $\underline{Y}$ de Y_R. C'est une courbe semi-stable dont les composantes sont soit des revêtements étales de la courbe elliptique ordinaire $\underline{E}''$, donc sont ordinaires, soit des revêtements galoisiens de groupe G' de la courbe $\underline{X}'$, générique de genre $g-1$, où G' est un sous-groupe de G. Comme par hypothèse, l'ordre de G est premier à $g!$, l'ordre de G' est premier à $(g-1)!$. Par hypothèse de récurrence, les composantes de $\underline{Y}$ au-dessus de $\underline{X}'$ sont donc ordinaires. Finalement, la courbe semi-stable $\underline{Y}$ est ordinaire et, par générisation, il en est de même de Y_K.

3. Exemples de Revêtements Non Ordinaires

Considérons une courbe propre X, lisse et connexe de genre $g \geqslant 2$, définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On plonge X dans sa jacobienne J de la manière habituelle, plongement défini à translation près.

Soit n un entier > 0, premier à p.

Rappel sur les Divisions de Polarisations (confer [Mu])

Notons θ' (resp. θ) un diviseur > 0 sur J, symétrique, qui définit une polarisation principale sur J (resp. définit la polarisation principale usuelle sur J). Soit $N = O_J(\theta')$ le faisceau inversible associé. Soit d le degré de $N|X$. On a donc $d = g$ si $\theta' = \theta$.

Notons $\alpha : J \to J$ la multiplication par n dans J et soit A son noyau. Alors $\alpha^*(N) \approx N^{\otimes n^2}$ et $N^{\otimes n}$ est un faisceau inversible symétrique sur J, stable par les translations par les éléments de A.

Le groupe A, noyau de la polarisation définie par $N^{\otimes n}$, est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $<,>'$ à valeurs dans μ_n ([Mu]). Dans le cas où $\theta = \theta'$, on retrouve le cup-produit sur $A :<,>$.

Soit B un sous-groupe de A totalement isotrope maximal pour $<,>'$ et soit $J^\wedge$ le quotient de J par B. Posons $C = A/B$. On a une factorisation canonique:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ J & J^\wedge \arrow[l, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

avec $\ker \beta = B$, $\ker \gamma = C$.

On sait ([Mu]) que $N^{\otimes n}$ se descend en $M^\wedge$ sur $J^\wedge$ et que $M^\wedge$ définit une polarisation principale sur $J^\wedge$. Le faisceau $M^\wedge$ est défini à tensorisation près par un faisceau inversible d'ordre divisant n, élément de C (vu comme sous-groupe de la variété duale de $J^\wedge$). Les faisceaux $M^{\wedge \otimes n}$ et $\gamma^*(N)$ sur $J^\wedge$, ont même image réciproque par β, donc diffèrent par un faisceau inversible d'ordre divisant n. Lorsque n est impair on peut choisir $M^\wedge$ symétrique auquel cas $M^{\wedge \otimes n}$ et $\gamma^*(N)$ coïncident.

Considérons le faisceau $\gamma_*(M^\wedge)$ qui est un fibré vectoriel sur J de rang n^g et soit $F = \gamma_*(M^\wedge)|X$. Pour tout faisceau inversible L sur J algébriquement équivalent à 0, on a $H^0(J, \gamma_*(M^\wedge) \otimes L) \approx H^0(J^\wedge, M^\wedge \otimes \gamma^*(L))$. C'est un k-vectoriel de rang

https://doi.org/10.1023/A:1001840726893 Published online by Cambridge University Press

1, puisque $M^\wedge$ et donc aussi $M^\wedge \otimes \gamma^*(L)$, définissent des polarisations principales sur $J^\wedge$. Changer L revient à translater $\gamma_*(M^\wedge)$ par un élément de J. Pour L général, on a donc $H^0(X, F) \neq 0$. Autrement dit si $L_{o,gen}$ désigne un faisceau inversible sur X, général de degré 0, on a $H^0(X, F \otimes L_{o,gen}) \neq 0$. Par semi-continuité, on en déduit que $H^0(X, F \otimes L_o) \neq 0$, pour tout faisceau inversible L_o de degré 0 sur X.

Désignons par Y (resp. Z) la courbe de $J^\wedge$ (resp. J) image réciproque de X par γ (resp. α).

On a $\deg(N|X) = d$, $\deg N^{n^2}|Z = dn^{2g}$, donc $\deg N^n|Z = dn^{2g-1}$. $\deg M^\wedge|Y = dn^{g-1}$. Par suite le fibré F sur X est de pente d/n.

(Le fibré F ci-dessus est, à la présentation près, celui considéré dans [Ra] pour contre-exempler la propriété (*)).

On suppose désormais que $n|d$ et on pose $d = \delta n$ où δ est donc un entier égal à la pente de F. On choisit un faisceau inversible P sur X de degré δ, tel que $P^n = N|X$. Considérons sur Y le faisceau inversible $L^\wedge = (M^\wedge|Y) \otimes \gamma^*(P^{-1})$ et soit $L'' = \beta^*(L^\wedge)$. Alors $L''^n = N^{n^2}|Z \otimes \alpha^*(N^-1)$, donc est trivial sur Z. Il en résulte que L'' est d'ordre divisant n. Notons par ailleurs que L'' ne dépend pas du choix de $M^\wedge$, ni de celui de P.

Posons $E = \gamma_*(L^\wedge)$ qui est un fibré sur X, de rang n^g, de pente zéro, associé à une représentation ρ de $\pi_1(X)$ de rang n^g. On a $E \otimes P = F$. En particulier, pour tout faisceau inversible L_δ sur X, de degré δ, on a $h^o(E \otimes L_\delta) > 0$.

Nous allons préciser le groupe de Galois dont ρ est une représentation. Pour tout a dans A, notons T_a la translation par a dans Z. Au faisceau $N^{\otimes n}$ sur J est associé un groupe $\mathcal{G}$, du type considéré par Mumford [Mu]. $\mathcal{G}$ est une extension centrale de A par k^*. Un élément de $\mathcal{G}$ est de la forme (a, u) où a est dans A et u est un isomorphisme $N^{\otimes n} \approx T_a^*(N^{\otimes n})$ et la loi de composition est la loi naturelle. La forme commutateur associée est le cup-produit $<, >'$: $A \times A \to \mu_n \hookrightarrow k^*$.

Pour tout a dans A, on a un isomorphisme canonique $\alpha^*(P) \approx T_a^*\alpha^*(P)$. Il en résulte que $\mathcal{G}$ est aussi le groupe associé à L'' formé des automorphismes (a, v) où a est dans A et v est un isomorphisme: $L'' \approx T_a^*(L'')$.

On en déduit d'abord que L'' est un élément de $\mathrm{Pic}(Z)$ fixe par A. Puis, $<>'$ étant non dégénéré, que L'' est d'ordre n. Soit $Z'' \to Z$ le revêtement étale de groupe μ_n qui trivialise L''. Alors $Z'' \to X$ est galoisien de groupe H, où H est une extension d'Heisenberg de A par μ_n, dont la forme commutateur est le cup-produit $<>'$. (Notons que lorsque $\theta = \theta'$, alors $d = g$, donc $n|g$ et un tel revêtement existe bien d'après l'exemple 10). En particulier, ρ est une des représentations irréductibles de H, de rang n^g.

Les constructions précédentes ont été faites sur J et X. Elles auraient pu être réalisées tout aussi bien sur J^1 et X^1, déduites de J et X en appliquant le Frobenius relatif. Nous considérons désormais E comme fibré sur X^1.

LEMMA 16. *Soit δ' un entier avec $\delta' \leqslant (g-1)/(p-1)$. Alors le fibré B^1 des formes différentielles localement exactes sur X^1, contient un faisceau inversible de degré δ'.*

En effet soit δ' un entier et supposons que B^1 contienne un sous-fibré Q de rang 1 de degré δ', donc de pente $\mu' = \delta'$. Alors B^1/Q est un fibré de rang $p-2$, de degré $(p-1)(g-1)-\delta'$, donc de pente $\mu'' = [(p-1)(g-1)-\delta']/(p-2)$ et l'on a:

$\mu'' - \mu' = g - 1 + [(g-1)-(p-1)\delta']/(p-2)$. On a donc $\mu'' - \mu' \geqslant g-1$ pour $\delta' \leqslant (g-1)/(p-1)$.

D'après le résultat annoncé dans [Hi] tout fibré stable générique sur X^1 de pente $(g-1)$, contient un sous-fibré inversible de degré δ', dès que $\delta' \leqslant (g-1)/(p-1)$. Par déformation et spécialisation, on en déduit que tout fibré de pente $g-1$ contient un sous-faisceau inversible de degré δ', pour $\delta' \leqslant (g-1)(p-1)$. La démonstration de l'énoncé extrait de [Hi] n'est pas publiée, mais peut être consultée sur Internet à l'adresse : http://math.unice.fr/~ah/Brill/

THÉORÈME 17. *Soit X une courbe de genre $g \geqslant 2$ définie sur un corps de caractéristique $p > 0$ et plongée dans sa jacobienne J. Soit θ' une polarisation principale sur J, de degré d sur X. Soit n un entier premier à p qui divise d et vérifie $d/n \leqslant (g-1)/(p-1)$. Notons A le noyau de la multiplication par n dans J, muni de la forme alternée $<,>'$, à valeurs dans μ_n associé à θ'. Alors il existe une représentation ρ d'un groupe d'Heisenberg H relatif à n et au cup-produit $<,>'$, qui n'a pas de diviseur thêta.*

En effet, d'après le lemme 16, pour $\delta = d/n \leqslant (g-1)/(p-1)$ on peut trouver un faisceau inversible L_δ de degré δ sur X^1 qui est contenu dans B^1. On a alors $E \otimes L_\delta \subset E \otimes B^1$. Par suite, pour tout faisceau inversible $L_{o,gen}$ de degré zéro sur X^1, on a:

$$E \otimes L_\delta \otimes L_{o,gen} \subset E \otimes B^1 \otimes L_{o,gen}.$$

Or $L_\delta \otimes L_{o,gen}$ est un faisceau inversible de degré δ, et par suite le premier membre a des sections globales non nulles. Il en est donc de même du second et E n'a pas de diviseur thêta.

COROLLAIRE 18. *Prenons pour θ' la polarisation usuelle θ de sorte que $d = g$. Alors si $(n, p) = 1$, $n|g$ et $g/n \leqslant (g-1)/(p-1)$, il existe une représentation ρ d'un groupe d'Heisenberg H relatif à n et au cup-produit $<,>$ qui n'a pas de diviseur thêta.*

Remarque 19. Si $(g, p) = 1$, on peut, dans le corollaire 18, prendre $n = g$ et la condition $g/n \leqslant (g-1)/(p-1)$ se réduit à $p < g$.

Démonstration du théorème 2 dans le cas général. Partons de X courbe sur k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, de genre $g \geqslant 2$. Soit m un entier > 0 avec $(m, p) = 1$ et soit $c : X' \to X$ un revêtement cyclique étale de degré m. Si g' est le genre de X', on a $g' - 1 = m(g-1)$. Si les considérations du corollaire 18 s'appliquent à X' et que l'on peut trouver une représentation ρ' de $\pi_1(X')$ qui n'a pas de diviseur thêta, en l'induisant à $\pi_1(X)$, on obtient une représentation ρ de $\pi_1(X)$ qui n'a pas de diviseur thêta.

Il nous suffit donc de choisir l'entier m premier à p, de façon qu'il existe n premier à p, divisant $g' = 1 + m(g-1)$, tel que $g'/n \leqslant (g'-1)/(p-1) = m(g-1)/(p-1)$.

Par exemple, on peut faire le choix suivant:

(i) Supposons p impair.

Comme p ne divise pas à la fois $g-2$ et $g-1$, on peut choisir h égal à 1 ou 2, de façon que p ne divise pas $1-h(g-1)$. Ce choix étant fait, on prend $m = h(p-1)$ qui est premier à p. Puis on prend $n = g' = 1 + m(g-1) = 1 + h(p-1)(g-1) \equiv 1 - h(g-1) \bmod \cdot p$. Alors $(n,p) = 1$ et $g'/n = 1 \leqslant (g'-1)/(p-1) = m(g-1)/(p-1) = h(g-1)$.

(ii) Supposons $p = 2$.

Ecrivons $g = 2^r s$ avec s impair.

Si $s \geqslant 3$, on prend $m = 1$, $n = s$.

Si $g = 2^r$.

Pour $r \geqslant 2$, on prend $m = 3$, $n = g'/2 = -1 + 3 \cdot 2^{r-1}$.

Pour $r = 1$, on prend $m = 5$, $n = g'/2 = 3$.

Remarques 20.

1) Dans le cas général, on trouve un revêtement étale $Z \to Y \to X$, non ordinaire, galoisien de groupe G résoluble, avec $Y \to X$ cyclique d'ordre m, et $Z \to Y$ de groupe un groupe d'Heisenberg H relatif à l'entier n et au cup-produit de Y, tel que la représentation régulière de G, n'ait pas de diviseur thêta sur X.

2) L'existence de revêtements non ordinaires de la courbe générique de genre g en caractéristique $p > 0$, entraîne que certains groupes finis qui satisfont à la condition de Nakajima ne sont pas réalisables comme groupes de Galois. De façon précise, soit Γ un groupe fini et soit $t(\Gamma)$ le nombre minimum de générateurs de l'idéal d'augmentation I de l'algèbre du groupe Γ sur le corps algébriquement clos k. Pour que Γ soit groupe de Galois d'un revêtement étale d'une courbe propre, lisse, connexe, X de genre g, définie sur k, il est nécessaire que l'on ait $t(\gamma) \leqslant g$ [Na 2]. En caractéristique $p > 0$, cette condition, purement algébrique sur Γ, ne semble pas mettre en jeu les propriétés géométriques et arithmétiques des courbes liées à la chute du p-rang dans le cas non ordinaire. Ainsi soit $\pi : Y \to X$, un revêtement étale galoisien de groupe G d'ordre premier à p. Prenons pour Γ un groupe extension de G par un p-groupe fini P, abélien, annulé par p. Alors Γ est produit semi-direct du groupe P invariant par G et est déterminé par G et l'action naturelle de G sur P. Disons qu'un groupe Γ, du type précédent, est réalisable au-dessus de π, s'il existe un revêtement galoisien $Z \to X$ de groupe Γ, qui domine π. Il existe clairement un groupe Γ maximal qui est réalisable au-dessus de π. Il est obtenu en prenant pour P le G-module $H^1_{et}(Y, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Les calculs de multiplicités faits dans [Na 2] et [P–S], montrent que l'on a $t(\Gamma) \leqslant g$ si et seulement si les diverses représentations irréductibles ρ de G sur $\mathbb{F}_p$, apparaissent dans P avec des multiplicités moindres que la borne naturelle obtenue dans le cas où ρ est ordinaire pour X. Il en résulte que dès que Y n'est pas ordinaire, il existe des groupes Γ qui vérifient $t(\Gamma) \leqslant g$ et qui ne sont pas réalisables au-dessus de π.

Partons maintenant d'un groupe fini résoluble H, d'ordre premier à p tel qu'il existe un revêtement de la courbe générique X de genre $g \geqslant 2$, en caractéristique p, qui est galoisien de groupe H et qui n'est pas ordinaire (Th. 2). Soit G le plus petit quotient topologique de $\pi_1(X)$ qui domine tous les quotients topologiques de $\pi_1(X)$ isomorphes à H. Comme $\pi_1(X)$ est topologiquement de type fini, G est fini. Par ailleurs, G est résoluble d'ordre premier à p. Soit $\pi\colon Y \to X$ le revêtement associé à G. Alors π est, à isomorphisme près, l'unique revêtement de X, galoisien de groupe G et Y n'est pas ordinaire. Vu ce qui précède, il existe un groupe Γ extension de G par un groupe P abélien fini, annulé par p, tels que $t(\Gamma) \leqslant g$, qui n'est pas réalisable au-dessus de π. Par suite, Γ n'est pas réalisable comme groupe de Galois au-dessus de la courbe générique et, a fortiori, n'est pas réalisable comme groupe de Galois d'une courbe propre et lisse quelconque de genre g, définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique p.

3) Une représentation finie ρ du groupe fondamental peut être ordinaire pour un choix générique de la courbe et ne plus avoir de diviseur thêta pour un choix spécial. Ainsi partons d'une courbe X dont la jacobienne J admet, outre la polarisation usuelle θ, une autre polarisation principale θ'. Combinant les théorèmes 14 et 17, il peut arriver qu'une représentation d'Heisenberg relative à un entier n et à θ' n'ait pas de diviseur thêta pour la courbe X et soit ordinaire pour la courbe générique.

References

[Bo] Bouw, I.: Tame covers of curves: p-ranks and fundamental groups, Publ. Univ. Utrecht, 1998.

[Cr] Crew, R.: Etale p-covers in characteristic p, *Compositio Math.* **52** (1984), 31–45.

[D-N] Drezet, J.-M. et Narasimhan, M. S.: Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, *Invent. Math.* **97**, (1989), 53–94.

[D-M] Deligne, P. et Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. IHES.* **36** (1969), 1–34.

[Ek] Ekedahl, T.: The action of monodromy on torsion points of Jacobians, dans: *Proc. conf. Texel, Netherlands 1989*, Progress in Math, Birkhaüser, Basel, 1991, pp. 41–49.

[Fa] Faltings, G.: Stable G-bundles and projective connections, *J. Algebra Geom.* **2** (1993), 507–568.

[Hi] Hirschowitz, A.: Problèmes de Brill–Noether en rang supérieur, *C R Acad. Sci.* **307** (1988), 153–156.

[LP] Le Potier, J. : Module des fibrés semi-stables et fonctions thêta, dans: Maruyama, Masaki (eds), *Moduli ofVectors Bundles, Papers of the 35th Tamiguchi symposium,* Lecture Notes Pure Appl. Math. 179, Dekker, New York, 1996, pp. 33–48.

[Mu] Mumford, D.: On the equations defining Abelian varieties, I. *Invent. Math.* **1** (1966), 287–354.

[Na1] Nakajima, S.: On generalized Hasse–Witt invariants of an algebraic curve, dans: *Adv. Stud. in Pure Math.* 2, Kinokuniya, Tokyo, 1983, pp. 69–88.

[Na2] Nakajima, S.: On the Galois module structure of the cohomology groups of an algebraic variety, *Invent. Math.* **75** (1984), 1–8.

[Na3] Nakajima, S.: On the quotients of the fundamental group of an algebraic curve, dans: *Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry*, Adv. Stud. Pure Math. 12, Kinokuniya, Tokyo, 1987, pp. 259–264.
[P-S] Pacheco, A. et Stevenson, K.: Finite quotients of the algebraic fundamental group of projective curves in positive characteristic, A paraître.
[Ra] Raynaud, M.: Sections des fibrés vectoriels sur une courbe, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 103–125.
[Sa] Saïdi, M.: Revêtements modérés et groupe fondamental de graphe, *Compositio Math.* **107** (1997), 321–340.
[St1] Stevenson, K.: Galois groupes of étale covers of projective curves in characteristic p, *J. Algebra* **182** (1996), 770–804.
[St2] Stevenson, K.: Conditions related to π_1 of projective currves. A paraître.
[Zh] Zhang, B.: Revêtements étales abéliens des courbes génériques et ordinarité. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI* (1) (1992), 133–138.