Can. J. Math., Vol. XXXII, No. 4, 1980, pp. 885–892

INTERSECTIONS FINIES DE SOUS-GROUPES NETS

KHALID BENABDALLAH ET SERGE ROBERT

Dans la théorie des groupes abéliens, les diverses notions de pureté de sous-groupes jouent un rôle très important. Récemment, un ouvrage entier de A. P. Mishina et L. A. Skorniakov a été consacré à ces notions et à leurs généralisations à la théorie des modules (voir [**8**]). Espérant faire jouer aux sous-groupes purs d'un groupe abélien un rôle analogue à celui des idéaux primaires dans la théorie des anneaux noetheriens, L. Fuchs pose le problème de caractériser les sous-groupes d'un groupe abélien qui sont des intersections de familles finies de sous-groupes purs ([**4**] problème 13, p. 134). Ce problème, sans l'exigence de finitude offre beaucoup moins de difficultés. Une solution en est donnée par C. Megibben dans [**7**] pour les familles de sous-groupes purs et par K. M. Rangaswamy dans [**9**] pour les familles de sous-groupes nets. Quelques années auparavant, B. Charles et indépendamment S. Khabbaz (voir [**2**] et [**5**]) avaient résolu un autre problème de L. Fuchs ([**3**] problème 2, p. 70) qui demandait une caractérisation des sous-groupes d'un groupe divisible qui sont des intersections de sous-groupes divisibles. Ce dernier est un cas particulier des problèmes traités dans [**7**] et [**9**].

Dans cet article, les premières sections sont consacrées à l'établissement d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe A d'un groupe primaire G soit l'intersection d'une famille finie de sous-groupes nets de G. Ce résultat permet une solution du problème 13 de L. Fuchs dans le cas important où $A[p]$ est dense dans $G[p]$ par rapport à la topologie p-adique de G. Finalement, dans une dernière section, nous rassemblons divers résultats partiels sur le problème 13 de [**4**] ainsi que le cas fini du problème 2 de [**3**]. Nos notations suivent de près celles de [**4**], tandis que notre terminologie est une libre adaptation au français de celle de [**4**].

Tous les groupes considérés sont des groupes abéliens primaires.

0. Définitions et énoncé du problème. Soit p un nombre premier et soit G un p-groupe. Un sous-groupe N de G est dit *net* dans G si $N \cap pG = pN$. Si de plus, $N \cap p^nG = p^nN$ pour tout entier positif n, on dit que N est *pur* dans G.

Soit A un sous-groupe de G. Si il existe une famille finie de sous-groupes nets dans G dont l'intersection est A, nous écrivons $n(A) < \infty$.

Reçu le 21 septembre, 1978. Recherche effectuée alors que le permier auteur bénéficiait du fond C.N.R.C. No. A5591.

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-067-3 Published online by Cambridge University Press

Si de plus, cette famille contient m éléments et si toute famille de sous-groupes nets dont l'intersection est A contient au moins m éléments, nous écrivons $n(A) = m$. Ainsi $n(A) = 1$, veut dire que A est net et $n(A) = 2$ que A n'est pas net, mais est l'intersection de deux sous-groupes nets. On peut facilement vérifier qu'un groupe G est élémentaire (c'est-à-dire $pG = 0$) si et seulement si $n(A) < \infty$ pour tout sous-groupe A de G.

Si dans le paragraphe précédent l'on remplace le mot net par pur, le sens qu'il faut donner à $p(A) < \infty$ et $p(A) = m$ devient évident. Avec les conventions ci-dessus, notre problème se lit: trouver une caractérisation raisonnable des sous-groupes A d'un p-groupe G pour lesquels $n(A) < \infty$ (respectivement $p(A) < \infty$) et $n(A) = m$ (respectivement $p(A) = m$). Les deux sections suivantes établissent une telle caractérisation en fonction des dimensions de certains sous-espaces de $(G/A)[p]$.

1. La déficience d'un sous-groupe. Soit G un p-groupe et soit A un sous-groupe de G. Un sous-groupe N de G est une *enveloppe nette de* A si (i) N est net dans G et (ii) N est minimal net contenant A. La proposition suivante est bien connue:

PROPOSITION 1.1. *Soit A un sous-groupe d'un p-groupe G et N un sous-groupe de G contenant A. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) *N net et $N[p] = A[p]$;*
(ii) *N est maximal par rapport à la propriété $N \supset A$ et $N[p] \subset A[p]$;*
(iii) *N est une enveloppe nette de A.*

Les enveloppes nettes d'un sous-groupe ne sont en général pas isomorphes mais elles donnent lieu quand même à un invariant du sous-groupe que faute d'autre nom, nous avons appelé: la *déficience* du sous-groupe. Pour établir cet invariant, nous avons besoin d'une autre caractérisation des enveloppes nettes:

PROPOSITION 1.2. *Soit $A \subset N$ des sous-groupes d'un p-groupe G. Alors N est une enveloppe nette de A dans G si et seulement si N/A est un sous-groupe $(G[p] + A)/A$-haut dans G/A.*

Preuve. Rappelons qu'un sous-groupe K d'un groupe G est H-haut où H est un sous-groupe de G si K est maximal par rapport à $K \cap H = 0$. Notons que

$$\begin{aligned}(N/A) \cap ((G[p] + A)/A) &= (A + (N \cap G[p]))/A \\ &= (A + N[p])/A.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que ces deux sous-groupes de G/A sont disjoints si et seulement si $N[p] \subset A$. Une application de la propriété (ii) de la proposition 1.1 établit donc le résultat.

Définition 1.3. Soit N une enveloppe nette d'un sous-groupe A d'un groupe G, alors le *rang* de N/A qui est égal à la dimension de $(N/A)[p]$, en tant qu'espace vectoriel sur le corps de p-éléments, est invariant quelle que soit l'enveloppe nette N de A. En effet,

$$\operatorname{rang}(N/A) = \dim((N/A)[p]) \text{ et}$$
$$\dim((N/A)[p]) = \dim(((G/A)[p])/((G[p] + A)/A)),$$

ne dépend pas de N. On l'appelle la *déficience* de A et l'on écrit $\operatorname{def}(A)$. Nous avons donc $\operatorname{def}(A) = \operatorname{rang}(N/A)$. Notons que $\operatorname{def}(A) = 0$ si et seulement si A est un sous-groupe net de G.

La proposition 1.2 permet de traduire le problème des intersections d'un nombre fini de sous-groupes nets, dans le langage des espaces vectoriels. En effet, nous avons:

PROPOSITION 1.4. *Soit A un sous-groupe d'un p-groupe G, alors $n(A) < \infty$ si et seulement si dans $(G/A)[p]$ il existe une famille finie de sous-espaces complémentaires de $(G[p] + A)/A$ dont l'intersection est nulle.*

Preuve. Soit $\{M_i\}_{i=1}^n$ une famille de sous-groupes nets de G tels que $\bigcap_i M_i = A$ alors dans chaque M_i il existe N_i une enveloppe nette de A. Par la proposition 1.2 N_i/A est $(G[p] + A)/A$-haut dans G/A, donc $(N_i/A)[p]$ est un sous-espace de $(G/A)[p]$ complémentaire de $(G[p] + A)/A$. Clairement

$$\bigcap_i (N_i/A)[p] = 0.$$

Réciproquement, si $\{S_i/A\}_{i=1}^n$ sont des sous-espaces complémentaires de $(G[p] + A)/A$ dans $(G/A)[p]$ et si $\bigcap_i (S_i/A) = 0$, on choisit pour chaque i un sous-groupe N_i/A contenant S_i/A tel que N_i/A soit $(G[p] + A)/A$-haut alors: les N_i sont des enveloppes nettes de A et $(N_i/A)[p] = S_i/A$ donc $\bigcap_i (N_i/A) = 0$ et $A = \bigcap_i N_i$.

2. Familles de sous-espaces complémentaires. En vue de la section précédente, nous sommes amenés à considérer le problème suivant: soit L un sous-espace d'un espace vectoriel V, trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe n sous-espaces complémentaires de L dans V distincts dont l'intersection est nulle. Nous établissons d'abord quelques lemmes utiles:

LEMME 2.1. *Soit E et F deux ensembles tels que pour un entier n l'on ait: $(n - 1)|F| < |E| \leqq n|F|$ alors il existe une partition de E en n sous-ensembles non-vides E_i tels que $|E_i| \leqq |F|$.*

Preuve. Soit $X = F \times \{1, \ldots, n\}$ comme $|E| \leqq |X|$, il existe une application injective $f : E \to X$, posons $E_i = f^{-1}\{F \times \{i\}\}$. Clairement, $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ et $|E_i| \leqq |F|$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$. De plus, comme $|E| = \sum_{i=1}^n |E_i|$ aucun E_i n'est vide car autrement $|E| \leqq (n - 1)|F|$.

LEMME 2.2. *Soit L un sous-espace d'un espace vectoriel V. Si L possède n sous-espaces complémentaires distincts dont l'intersection est nulle, alors*

$$\dim(V/L) \leqq (n-1)\dim(L).$$

Preuve. Soit $\{M_i\}_{i=1}{}^n$ des sous-espaces de V tels que $M_i \oplus L = V$, $i = 1, \ldots, n$, et tels que $\bigcap_{i=1}^n M_i = 0$. Posons $W_j = \bigcap_{i=1}^j M_i$ alors il est clair que

$$\dim(M_1) = \sum_{j=1}^{n-1} \dim(W_j/W_{j+1})$$

ou

$$W_j/W_{j+1} = W_j/(W_j \cap M_{j+1}) \simeq (W_j + M_{j+1})/M_{j+1} \subset V/M_{j+1} \simeq L$$

et comme $M_1 \simeq V/L$, nous avons

$$\dim(V/L) \leqq (n-1)\dim(L).$$

LEMME 2.3. *Soit L un sous-espace d'un espace vectoriel V. Si il existe un entier $n \geqq 2$ tel que $(n-2)\dim(L) < \dim(V/L) \leqq (n-1)\dim(L)$ alors L possède n sous-espaces complémentaires dont l'intersection est nulle et le nombre n est minimal.*

Preuve. Notons d'abord que dans ce cas, $\dim(V)$ doit être finie si $n > 2$. Soit M un sous-espace complémentaire de L dans V, c'est à dire $L \oplus M = V$ et soit E une base de M et F une base de L. La condition de l'énoncé implique que

$$(n-2)|F| < |E| \leqq (n-1)|F|.$$

Par le lemme 2.1 il existe donc une partition de E en $n-1$ sous-ensembles $\{E_i\}_{i=1}{}^{n-1}$ tels que $1 \leqq |E_i| \leqq |F|$. Soit $E_i = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_i}$ et $\varphi_i : E_i \to F$ une injection de E_i dans F, on pose

$$X_i = \{x_\lambda + \varphi_i(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda_i}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

et l'on construit M_j le sous-espace engendré par $(\bigcup_{i \neq j} E_i) \cup X_j$. Clairement, $M_j \oplus L = V$. Il reste à voir que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i\right) \cap M = 0.$$

Mais

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i\right) \cap M = \bigcap_{j=1}^{n-1} (M_j \cap M) = \bigcap_{j=1}^{n-1} \left\langle \bigcap_{i \neq j} E_i \right\rangle = 0.$$

Nous avons donc obtenu n complémentaires de L dans V dont l'intersection est nulle. Par le lemme 2.2, si n n'est pas minimal, c'est-à-dire si L possède m complémentaires distincts où $m < n$, dont l'intersection est

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-067-3 Published online by Cambridge University Press

nulle, alors

$$\dim(V/L) \leqq (m-1)\dim(L) \leqq (n-2)\dim(L).$$

Ceci contredit l'hypothèse, donc n est minimal.

THÉORÈME 2.4. *Soit L un sous-espace d'un espace vectoriel V. Alors il existe n sous-espaces ($n \geqq 2$) complémentaires de L dans V dont l'intersection est nulle, et ce n est minimal si et seulement si*

(i) $(n-2)\dim(L) < \dim(V/L) \leqq (n-1)\dim(L)$.

De plus, si $\dim(L)$ *est infinie, alors $n = 2$.*

Preuve. Le lemme 2.3 montre que la condition (i) est suffisante. Il reste à vérifier qu'elle est nécessaire. Supposons donc qu'il existe n sous-espaces complémentaires de L dans V et que ce n est minimal ($n \geqq 2$) dans le sens que toute famille de sous-espaces complémentaires de L dont l'intersection est nulle, contient au moins n membres. Alors, par le lemme 2.2 nous savons que

$$\dim(V/L) \leqq (n-1)\dim(L).$$

Si $\dim(L)$ est finie, alors $L \neq V$ et il existe $m \leqq n-1$ tel que

$$(m-1)\dim(L) < \dim(V/L) \leqq m\dim(L).$$

Par le lemme 2.3, il existe alors $m+1$ sous-espaces complémentaires de L dans V dont l'intersection est nulle. Ceci implique que $m+1 \geqq n$, d'où $m = n-1$ et (i) est satisfaite.

Maintenant si $\dim(L)$ est infinie, nous montrons que $n = 2$ et la formule (i) reste vraie. En effet, comme $\dim(V/L) \leqq (n-1)\dim(L)$ on voit que $\dim(V/L) \leqq \dim(L)$. Soit $V = M \oplus L$, comme $n \geqq 2$, $M \neq 0$, et soit E et F des bases respectivements de M et L. Comme $|E| \leqq |F|$, soit $\varphi : E \rightarrow F$ une injection et soit N le sous-espace engendré par $\{x + \varphi(x) | x \in E\}$. Clairement $N \oplus F = V$ et $M \cap N = 0$.

Dans le théorème précédent, nous parlons d'une minimalité absolue (voir le début de la preuve du théorème 2.4). Il est aussi possible d'envisager une minimalité relative. Nous disons qu'une famille $\mathscr{F}$ de sous-espaces complémentaires de L dont l'intersection est nulle, est *minimale* si l'intersection de toute sous-famille propre de $\mathscr{F}$ est non nulle.

THÉORÈME 2.5. *Soit L un sous-espace d'un espace vectoriel V. Alors il existe une famille minimale de sous-espaces complémentaires de L dans V, dont l'intersection est nulle, contenant n membres ($n \geqq 2$) si et seulement si*
(ii) $(n-1) \leqq \dim(V/L) \leqq (n-1)\dim(L)$.

Preuve. Si une telle famille existe, le lemme 2.2 donne

$$\dim(V/L) \leqq (n-1)\dim(L).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-067-3 Published online by Cambridge University Press

Soit $M_1, \ldots, M_n$ les membres de cette famille. La famille étant minimale, la suite $M_1, M_1 \cap M_2, \ldots, M_1 \cap \ldots \cap M_{n-1}$ est strictement décroissante et donc $\dim(M_1) \geqq n - 1$ d'où

$$(n - 1) \leqq \dim(V/L) \leqq (n - 1)\dim(L).$$

Supposons maintenant que (ii) est satisfaite et soit E une base d'un sous-espace complémentaire M de L dans V. Nous pouvons encore partitionner E en $(n - 1)$ sous-ensembles non vides, chacun de cardinalité plus petite ou égale à $\dim(L)$ et un raisonnement analogue à celui utilisé dans la preuve du lemme 2.3 donne l'existence d'une famille minimale de sous-espaces complémentaires de L dans V contenant n membres et dont l'intersection est nulle.

3. Quelques applications. Nous interprétons maintenant les résultats de la section précédente dans le langage de la théorie des p-groupes. Correspondant au théorème 2.4, nous obtenons:

THÉORÈME 3.1. *Soit A un sous-groupe non-net d'un p-groupe G. Alors $n(A) = m$ si et seulement si*

(i) $(m - 2)\dim(G[p]/A[p]) < \operatorname{def}(A) \leqq (m - 1)\dim(G[p]/A[p])$.

De plus, si $\dim(G[p]/A[p])$ est infinie, alors $n(A) < \infty$ entraîne que $n(A) = 2$.

Preuve. Le théorème 2.4. appliqué au sous-espace $(G[p] + A)/A$ de $(G/A)[p]$ et l'isomorphisme

$$((G[p] + A)/A) \simeq (G[p]/(G[p] \cap A)) = (G[p]/A[p])$$

établissent ce théorème.

Une conséquence de ce théorème est le fait, un peu surprenant, que si un sous-groupe A est l'intersection de m sous-groupes nets où $m > 2$ et $n(A) = m$ alors nécessairement G/A est un groupe de rang fini.

Le théorème 2.5, traduit dans le langage des p-groupes, donne:

THÉORÈME 3.2. *Soit A un sous-groupe non-net d'un p-groupe G. Alors il existe une famille minimale contenant m sous-groupes nets dont l'intersection est A si et seulement si*

$$(m - 1) \leqq \operatorname{def}(A) \leqq (m - 1)\dim(G[p]/A[p]).$$

Ainsi, si $\operatorname{def}(A)$ est infinie, on peut écrire A comme l'intersection de familles minimales contenant m éléments pour tout entier $m \geqq 2$. Par contre, si $\operatorname{def}(A)$ est finie, ou encore $\dim(G[p]/A[p])$ est finie, le nombre de possibilités devient plus restreint.

Dans [**6**], C. Meggiben caractérise les sous-groupes d'un groupe primaire dont les enveloppes nettes sont pures. Il appelle ces sous-groupes des noyaux de pureté. Les noyaux de pureté comprennent entre autres, tous les sous-groupes d'un groupe G dont les socles sont des sous-groupes denses de $G[p]$ dans la topologie p-adique de G. Pour les noyaux de pureté, nous obtenons une solution complète du problème 13 de [**4**].

THÉORÈME 3.3. *Soit A un noyau de pureté d'un p-groupe G. Alors $p(A) = m \geqq 2$, si et seulement si*

$$(m-2)\dim(G[p]/A[p]) < \operatorname{def}(A) \leqq (m-1)\dim(G[p]/A[p]).$$

Pour terminer, nous donnons deux résultats concernant le problème 13 de [**4**] et la version finie du problème 2 de [**3**].

PROPOSITION 3.4. *Soit A un sous-groupe d'un p-groupe G et B un sous-groupe de base de A alors si $p(A) = 2$ on a aussi $p(B) = 2$.*

Preuve. $p(A) = 2$ implique que A n'est pas pur et que $A = H \cap K$ où H et K sont des sous-groupes purs dans G. A/B étant divisible, il existe R et S des sous-groupes de G tels que

$$H/B = (A/B) \oplus (R/B) \quad \text{et} \quad K/B = (A/B) \oplus (S/B).$$

Comme B est pur dans A, R est pur dans H et S est pur dans K (voir [**1**] lemme 2.2, p. 1177) et de plus $R \cap S = B$. A n'étant pas pur dans G, B ne l'est pas aussi. Donc $p(B) = 2$.

Le résultat suivant est assez inattendu.

PROPOSITION 3.5. *Soit A un sous-groupe net d'un p-groupe G, et soit H un sous-groupe A-haut de G. Si H contient deux sous-groupes de base disjoints alors $p(A) \leqq 2$.*

Preuve. Soit B_1 et B_2 les deux sous-groupes de base de H. H/B_i étant divisible et $(H/B_i) \cap ((A + B_i)/B_i) = 0$ il existe R_i un sous-groupe de G contenant $A + B_i$ tel que

$$G/B_i = (R_i/B_i) \oplus (H/B_i), \text{ pour } i = 1, 2.$$

Comme B_i est pur dans H, une application du lemme cité dans la preuve de la proposition 3.4 nous donne que R_i est pur dans G, $i = 1, 2$. De plus

$$A \subset R_1 \cap R_2 \quad \text{et} \quad H \cap (R_1 \cap R_2) = B_1 \cap B_2 = 0,$$

il s'ensuit que $A = R_1 \cap R_2$ car A est net et

$$A[p] = (R_1 \cap R_2)[p].$$

Donc $p(A) \leqq 2$.

Le résultat précédent n'est pas une simple curiosité puisque l'on sait qu'un p-groupe possède deux sous-groupes de base disjoints si et seulement si il existe dans G un sous-groupe de base B tel que rang final $(B) \leqq$ rang (G/B).

Quant à la version finie du problème 2 de [**3**] les sous-groupes nets d'un groupe divisible étant précisément les sous-groupes divisibles de celui-ci, nous obtenons immédiatement une solution complète:

THÉORÈME 3.6. *Soit A un sous-groupe d'un p-groupe divisible G. Alors A est l'intersection de m sous-groupes divisibles de G et m est minimal $\geqq 2$ si et seulement si*

$$(m-2)\dim(G[p]/A[p]) < \operatorname{def}(A) \leqq (m-1)\dim(G[p]/A[p]).$$

Au terme de ce travail, il nous faut dire qu'une solution générale et satisfaisante du problème des intersections finies de sous-groupes purs reste encore à trouver.

BIBLIOGRAPHIE

1. K. Benabdallah et J. M. Irwin, *On quasi-essential subgroups of primary abelian groups*, Journ. Can. Math. *22* (1970), 1176–1184.

2. B. Charles, *Une caractérisation des intersections de sous-groupes divisibles*, C.R. Acad. Sci. Paris *250* (1960), 256–257.

3. L. Fuchs, *Abelian groups*, Publ. House of the Hungar. Acad. Sci. Budapest (1958).

4. ——— *Infinite abelian groups*, Acad. press. vol. 36-1 (1970).

5. S. A. Khabbaz, *The subgroups of a divisible group G which can be represented as intersections of divisible subgroups of G*, Pacific J. Math. *11* (1961), 267–273.

6. C. Meggiben, *Kernels of purity in abelian groups*, Publ. Math. Debrecen *11* (1964), 160–164.

7. ——— *On subgroups of primary abelian groups*, Publ. Math. Debrecen *12* (1965), 293–294.

8. A. P. Mishina et L. A. Skorniakov, *Abelian groups and modules*, American Math. Soc. translations ser. 2 *107* (1976).

9. K. M. Rangaswamy, *Characterization of intersections of neat subgroups of abelian groups*, J. Indian Math. Soc. *29* (1965), 31–36.

Université de Montréal,
Montréal, Québec