Canad. Math. Bull. Vol. **23** (4), 1980

SUR LES M-IDEAUX DANS CERTAINS ESPACES D'OPERATEURS ET L'APPROXIMATION PAR DES OPERATEURS COMPACTS

BY
H. FAKHOURY

SOMMAIRE. It is shown that if $V = C(X)$ or $V = L^1(\mu)$ then the subspace of compact (resp. weakly compact) operators from V into itself is not an M-ideal in the space of bounded operators. This is the contrary to what happens when $V = Co(\mathbb{N})$ or $l^p(\mathbb{N})$. The main result is proved via the best approximation properties of M-ideals and some results concerning norm one projections in $C(X)$ and $L^1(\mu)$ are deduced from this fact.

La notion de M-*idéal* est développée dans [1] dans le but d'effectuer une étude précise de la structure d'un espace de Banach. Rappelons qu'un sousespace F de E est un M-idéal s'il existe une projection linéaire Q de E' sur l'annulateur F° de F qui vérifie

$$\|x'\| = \|Q(x')\| + \|x' - Q(x')\|; \qquad \forall x' \in E'.$$

Pour avoir des exemples de M-idéaux on peut consulter [1], [3]. Les M-idéaux possèdent des propriétés intéressantes pour la meilleure approximation [3], [6]. Ainsi, si F est un M-idéal de E alors pour tout e de E il existe une partie $\mathcal{P}(e) \subset F$ telle que pour tout f de $\mathcal{P}(e)$ on a

$$\|e - f\| = \inf\{\|e - f'\|; f' \in F\};$$

de plus, le convexe $\mathcal{P}(e)$ engendre algébriquement l'espace F et l'application $\mathcal{P}$ admet une sélection continue. Par conséquent, pour montrer l'existence d'une projection continue de meilleure application de E sur F, il est souvent plus commode de montrer que F est un M-idéal dans E. Signalons, par exemple que, d'après [5], l'espace des opérateurs compacts de V dans lui-meme est un M-idéal dans l'espace des opérateurs bornés quand V parcourt une classe d'espaces contenant $Co(\mathbb{N})$ et $l^p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$. Nous allons voir que si $V = C(X)$ ou bien $V = L^1(\mu)$ la situation est tout-à-fait différente.

Si V est un espace de Banach on note V' son dual et $B(V)$ sa boule unité fermée. Si V et W sont deux espaces de Banach on désigne par $\mathcal{L}(V, W)$ (resp. $\mathcal{F}(V, W)$, $\mathcal{K}(V, W)$) l'espace des opérateurs bornés (resp. faiblement compacts, compacts) de V dans W. On écrira simplement $\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{F}(V)$, et $\mathcal{K}(V)$ si

Reçu par la rédaction le 29 mars 1978; version revisée reçue le 27 nov. 1978 et le 17 mars 1979.

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-059-3 Published online by Cambridge University Press

$V = W$. Si $W = C(X)$ à tout opérateur T de $\mathscr{L}(V, W)$ correspond une application continue t de X dans V' muni de $\sigma(V', V)$ telle que

$$T(v)(x) = t(x)(v) \qquad \forall x \in X; \forall v \in V.$$

Cette application est normiquement (resp. $\sigma(V', V'')$) continue si T est compact (resp. faiblement compact) de V dans $C(X)$. Soit $\mathscr{G}$ un sous-espace de $\mathscr{L}(V, W)$, on note $\mathscr{G}(T)$ l'ensemble (éventuellement vide) des opérateurs de $\mathscr{G}$ qui réalisent la meilleure approximation de T, c'est-à-dire

$$\mathscr{G}(T) = \{S \in \mathscr{G}; \|T - S\| = d[T, \mathscr{G}]\}$$

où $d[T, \mathscr{G}]$ désigne la distance de T au sous-espace $\mathscr{G}$. Un opérateur T de $\mathscr{L}(V, W)$ est *complètement continu* si pour toute suite (v_n) de V qui converge faiblement vers 0 la suite $\|T(v_n)\|$ converge vers 0. Si $V = C(X)$ il résulte de [4] que l'ensemble des opérateurs complèment continus de $\mathscr{L}(V, W)$ coïncide avec $\mathscr{F}(V, W)$.

Nous allons voir que si $V = C(X)$ ou $V = L^1(\mu)$ alors $\mathscr{K}(V)$ et $\mathscr{F}(V)$ ne sont pas des M-idéaux de $\mathscr{L}(V)$. La preuve reposera sur les propriétés des M-idéaux relativement à la meilleure approximation. Signalons que pour $V = C([0, 1])$ le résultat est prouvé par des méthodes différentes dans [7]. En ce que concerne l'espace $Co(I)$ on montre que pour un espace V l'espace $\mathscr{K}(V, Co(I))$ est un M-idéal de $\mathscr{L}(V, Co(I))$. Les résultats établis pour la meilleure approximation de l'identité de $C(X)$ permettent de généraliser un résultat de [8]. En effect, si X est un compact ayant au plus n points isolés alors tout sous-espace de codimension finie qui est l'image de $C(X)$ par une projection contractante est nécessairement de codimension inférieure à n. Un résultat dual est vrai pour les projections contractantes sur les sous-espaces de dimension finie de $L^1(\mu)$ relatif à une mesure μ ayant au plus n-atomes. Les preuves sont données dans le cas réel.

Le résultat central de cet article est le lemme 4 qui affirme que si T est une isométrie de $C(X)$ dans $C(Y)$ et si S est un opérateur faiblement compact de $C(X)$ dans $C(Y)$ vérifiant $\|T - S\| = 1$ alors pour certains points non isolés y_0 dans Y on a $S(f)(y_0) = 0$, pour tout f de $C(X)$. Je remercie le "referee" qui m'a indiqué la référence [9] où il est établi que si $V = C([a, b])$ et $S \in \mathscr{K}(V)$, alors $\|I + S\| = 1 + \|S\|$, résultat qui permet de montrer à son tour que $\mathscr{K}(V)$ n'est pas un M-idéal de $\mathscr{L}(V)$.

Les deux lemmes suivants sont assez simples, ils sont donnés sans preuves.

LEMME 1. *Soient V et W deux espaces de Banach, T et S deux opérateurs de $\mathscr{L}(V, W)$; on suppose S complètement continu. Alors*

$$\|T - S\| \geq \sup\{\overline{\lim}\, \|T(v_n)\|\}$$

où (v_n) décrit *l'ensemble des suites de la sphère unitè de V qui convergent faiblement vers* 0.

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-059-3 Published online by Cambridge University Press

Comme tout opérateur faiblement compact défini sur $C(X)$ est complétement continu, le lemme précédent donne le:

LEMME 2. *Soit X un compact infini; si T est une isométrie de $V = C(X)$ dans un espace de Banach W, on a:*

$$1 = d[T, \mathcal{K}(V, W)] = d[T, \mathcal{F}(V, W)].$$

La proposition suivante donne la relation qui doit exister entre deux compacts X et Y pour qu'il existe une isométrie de $C(X)$ dans $C(Y)$. Ce résultat est dû à [2]; la preuve proposée ici nous paraît beaucoup plus simple que la démonstration initiale de [2]. Si X et K sont deux compacts et j une homéomorphie de X *dans* K, on dira que (X, K, j) possède la propriété d'extension s'il existe une application linéaire isométrique de $C(j(X))$ dans $C(K)$ notée R telle que $R(f)$ coïncide avec f pour toute fonction f de $C(j(X))$. Ceci équivaut à l'existence d'une application continue m de K dans la boule unité de l'espace $M(j(X))$ des mesures sur $j((X)$ muni de sa topologie vague telle que $m(k) = \varepsilon(k)$ pour tout k dans $j(X)$. Cette situation est automatiquement réalisée si X est métrisable d'après les rèsultats de Michael. Vu son interêt propre, on suppose dans la proposition suivante que les espaces $C(X)$ et $C(K)$ sont indifféremment réèls ou complexes. Dans la suite 1_X désigne la fonction caractéristique de X.

PROPOSITION 3. *Soient X et Y deux compacts; il existe une isométrie linéaire T de $C(X)$ dans $C(Y)$ si et seulement s'il existe un quotient K de Y et une homéomorphie j de X dans K telles que (X, K, j) possède la propriété d'extension. De plus on peut toujours construire K de façon que l'on ait:*

$$\overline{T(1_X)(y)} \cdot T(f)(y) = m(\varphi(y))(f_0 j^{-1}); \ \forall y \in Y, \ \forall f \in C(X);$$

où φ est la surjection de Y sur K et m l'application définie plus haut.

DÉMONSTRATION. Si (X, K, j) possède la propriété d'extension il existe une application vaguement continue m de K dans la boulé unité de $M(j(X))$ vérifiant $m(k) = \varepsilon(k)$ pour tout k de $j(X)$. Soit φ la surjection de Y sur K; on pose T l'opérateur de $C(X)$ dans $C(Y)$ défine par

$$T(f)(y) = m(\varphi(y))(f_0 j^{-1}) \qquad \forall y \in Y;$$

et on a une isométrie.

Inversement, si T est une isométrie de $C(X)$ dans $C(Y)$ on a $T'[B(M(Y))] = B[M(X)]$. En effect, $\|T'\| = 1$ et par conséquent le premier membre est inclus dans le deuxième. D'autre part, si ν est une mesure de masse 1 sur X alors $\nu_0 T^{-1}$ est une fonctionnelle de norme 1 sur l'espace $T(C(X))$. Si μ est une mesure de masse 1 sur Y qui prolonge $\nu_0 T^{-1}$ on a $T'(\mu) = \nu$; ce qui montre l'égalité. Ainsi tout point extrêmal de $B(M(X))$ qui est de la forme $\varepsilon(x)$ est

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-059-3 Published online by Cambridge University Press

l'image par T' d'un point de la forme $\alpha(y)\varepsilon(y)$ où $|\alpha(y)|=1$. En appliquant cette égalité à la fonction 1_X on obtient:

$$\varepsilon(x)=\overline{T(1_X)(y)}\cdot T'(\varepsilon(y)); \qquad \forall x\in X$$

et pour tous les points y concernés, qui sont par conséquent inclus dans l'ensemble $Z=\{y\in Y; |T(1_X)(y)|=1\}$. Soient φ l'application de Y dans $B(M(X))$ définie par:

$$\varphi(y)=\overline{T(1_X)(y)}\cdot T'(\varepsilon(y)), \qquad \forall y\in Y,$$

et $K=\varphi(Y)$. Si l'on note j l'application $x\to\varepsilon(x)$ de X dans K, alors (X, K, j) possède la propriété d'extension et l'isométrie T vérifie:

$$\overline{T(1_X)(y)}\,T(f)(y)=m(\varphi(y))(f_0 j^{-1}); \quad \text{pour} \quad y\in Y \quad \text{et} \quad f\in C(X),$$

ceci porvient du fait que $j(X)\subset k\subset B(M(X))$ et que pour tout k de K on peut poser

$$m(k)(f_0 j^{-1})=\int_X f(t)\,dk(t).$$

Il est à noter que, dans la construction précédente on a $\varphi^{-1}(j(X))\subset Z$.

On utilisera librement dans la suite les notations de la proposition 3 en identifiant X et $j(X)$. Ainsi chaque fois que l'on a une isométrie T de $C(X)$ dans $C(Y)$ on sait qu'il existe un quotient K de Y qui contient X et si l'on note φ la surjection de Y sur K, on a $\varphi^{-1}(X)\subset Z=\{y\in Y; |T(1_X)(y)|=1\}$; de plus il existe une application vaguement continue de K dans la boule unité de $M(X)$ qui coïncide avec $x\to\varepsilon(x)$ pour tout x de X, et pour tout y de Y et tout f de $C(X)$ on a:

$$\overline{T(1_X)(y)}\cdot T(f)(y)=m(\varphi(y))(f).$$

On se place dorénavent dans le cas des espaces de Banach réèls.

Lemme 4. *Soient X et Y deux compacts tels qu'il existe une isométrie T de $C(X)$ dans $C(Y)$ et S un opérateur de $\mathcal{F}(C(X), C(Y))$ tel que $\|T-S\|=1$. Soit y_0 un point de Y tel que pour tout voisinage ω de y_0 l'ensemble $\varphi(\omega)\cap X$ contienne une infinité de points. Alors pour toute fonction f de $C(X)$ on a $S(f)(y_0)=0$.*

Démonstration. L'hypothèse sur y_0 montre qu'il appartient à $\varphi^{-1}(X)$ et qu'il n'y est pas isolé. Avec les notations précédentes on a $y_0\in Z$ et par conséquent $|T(1_X)(y)|=1$ pour une infinité de points dans chaque voisinage de y_0. Quitte à changer T en $-T$ on peut supposer que $T(1_X)(y_0)=1$ ainsi que pour une infinité de points de tout voisinage de y_0. Soit s l'application de Y dans $M(X)$ associée à S, l'application associée à T est $t(y)=m(\varphi(y))$ et on a

$m(\varphi(y)) = \varepsilon(\varphi(y))$ pour tout y de $\varphi^{-1}(X)$. Ceci provient de la proposition précédente. Supposons pour commencer que l'opérateur S est compact ou ce qui revient au même, que l'application s est continue de Y dans $M(X)$ muni de sa norme. Il s'agit de montrer que $s(y_0) = 0$; sinon on a $\|s(y_0)\| = \delta > 0$, on pose

$$\omega = \{y \in Y; \|s(y) - s(y_0)\| < \delta/2\}.$$

La mesure $s(y_0)$ charge tous les points de $\varphi(\omega) \cap X$; sinon, il existe y de $\omega \cap \varphi^{-1}(X)$ tel que

$$\begin{aligned} 1 + \delta/2 &> \|\varepsilon(\varphi(y)) - s(y)\| + \|s(y) - s(y_0)\| \\ &\geqslant \|\varepsilon(\varphi(y)) - s(y_0)\| + \|s(y_0)\| = 1 + \delta. \end{aligned}$$

La première inégalité provient du fait que pour tout y de Y on a

$$\|m(\varphi(y)) - s(y)\| \leq 1$$

puisque $\|T - S\| = 1$, et en particuleir si $y \in \varphi^{-1}(X)$ on a $\|\varepsilon(\varphi(y)) - s(y)\| \leq 1$. Par conséquent, pour tout y de $\omega \cap \varphi^{-1}(X)$ la mesure $s(y_0)$ se décompose en

$$s(y_0) = \lambda(y)\varepsilon(\varphi(y)) + s'(y); \qquad \forall y \in \varphi(\omega) \cap X$$

où $\lambda(y)$ est un scalaire non nul et $s'(y)$ une mesure sur X qui ne charge pas le point $\varphi(y)$. On a les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} 1 + \delta/2 &\geq \|\varepsilon(\varphi(y)) - s(y_0)\| = |1 - \lambda(y)| + \|s'(y)\| \\ \delta &= \|s(y_0)\| = |\lambda(y)| + \|s'(y)\|. \end{aligned}$$

En comparant ces deux inégalités on voit que

$$1 - \delta/2 \geq |1 - \lambda(y)| - |\lambda(y)|.$$

Ce qui implique immédiatement que $\lambda(y) > 0$. Supposons que $\lambda(y) \leq 1$, l'inégalité précédente devient $\lambda(y) \geq \delta/4$. Ainsi la mesure $s(y_0)$ possède une masse supérieure à $\inf(1, \delta/4)$ en une infinité de points qui sont les points de $\varphi(\omega) \cap X$, ce qui est absurde. Par conséquent, on a $\delta = 0 = \|s(y_0)\|$ d'où le résultat recherché dans le cas où S est compact. Supposons maintenant que S est faiblement compact ainsi s est continue si $M(X)$ est muni de sa topologie faible. Soit P la projection de $M(X)$ dans lui-même qui est linéaire, de norme 1, et définie par

$$P(\mu) = \sum_{x \in X} \mu(x)\varepsilon(x)$$

qui associe à toute mesure sa partie atomique, ici $\mu(x)$ désigne la masse de μ au point x. La projection P est continue si $M(X)$ est muni de sa topologie faible de même que l'application $y \mapsto P_0 s(y)$. Or la bande des mesures atomiques sur X est isométrique à l'espace $l^1(X)$ et par conséquent les parties faiblement compactes sont normiquement compactes (voir [4] par exemple). L'application $P_0 s$ représente donc un opérateur compact R de $C(X)$ dans

$C(Y)$ défini par:

$$R(f)(y)=P_0 s(y)(f); \qquad \forall f\in C(X).$$

Pour tout y de $\varphi^{-1}(X)$ on a

$$\begin{aligned}1\geq\|\varepsilon(\varphi(y))-s(y)\| &= \|\varepsilon(\varphi(y))-P(s(y))-[s(y)-P(s(y))]\|\\ &=\|\varepsilon(\varphi(y))-P(s(y))\|+\|s(y)-P(s(y))\|.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\|\varepsilon(\varphi(y))-P(s(y))\|\leq 1$ pour tout y de $\varphi^{-1}(X)$ et ainsi en reprenant la preuve de la première partie on voit que

$$R(f)(y_0)=0; \qquad \forall f\in C(X).$$

Ainsi, l'hypothèse du lemme montre que $P_0 s(y_0)=0$ ce qui veut dire que $s(y_0)$ est une mesure diffuse. Or pour tout y de $\varphi^{-1}(X)$ la mesure $s(y)\neq 0$ si et seulement si elle charge le point $\varphi(y)$. En effet, l'égalité $\|T-S\|=1$ implique

$$\|m(\varphi(y))-s(y)\|\leq 1; \qquad \forall y\in Y$$

inégalité qui devient

$$\|\varepsilon(\varphi(y))-s(y)\|\leq 1; \qquad \forall y\in \varphi^{-1}(X).$$

Cependant, si $s(y)$ ne charge pas le point $\varphi(y)$ on a

$$1\geq\|\varepsilon(\varphi(y))-s(y)\|=1+\|s(y)\|.$$

Cette contradiction montre que $s(y_0)=0$ et achève la démonstration du lemme.

L'hypothèse sur le point y_0 est réalisée par exemple si φ est ouverte et si $\varphi(y_0)$ est un point non isolé de X. En tous cas, on a immédiatement les résultats suivants.

THEOREME 5. (a) *Soient $X\subset Y$ deux compacts tels qu'il existe une isométrie T de $C(X)$ dans $C(Y)$ telle que $T(f)|_X=f$ pour tout f dans $C(X)$. Pour tout opérateur S de $\mathcal{F}(C(X), C(Y))$ vérifiant $\|T-S\|=1$ et pour tout point x_0 non isolé de X on a*

$$S(f)(x_0)=0; \qquad \forall f\in C(X).$$

(b) *Soient X et Y deux compacts, φ une surjection continue de Y sur X et T l'isométrie de $C(X)$ dans $C(Y)$ définie par $T(f)=f_0\varphi$ pour tout f dans $C(X)$. Pour tout opérateur S de $\mathcal{F}(C(X), C(Y))$ vérifiant $\|T-S\|=1$ on a*

$$S(f)(y_0)=0; \qquad \forall f\in C(X),$$

en tout point y_0 non isolé de Y tel que pour tout voisinage ω de y_0 l'ensemble $\varphi(\omega)$ contient une infinité de points.

(c) *Soient X un compact et T une isometríe de $C(X)$ dans lui-même avec $T(1_X)=1_X$. Pour tout S de $\mathcal{F}(C(X))$ avec $\|T-S\|=1$ et pour tout x_0 non isolé*

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-059-3 Published online by Cambridge University Press

dans X on a

$$S(f)(x_0)=0; \qquad \forall f \in C(X).$$

THEOREME 6. (*a*) *Soient X et Y deux compacts tels qu'il existe une isométrie T de $C(X)$ dans $C(Y)$; on suppose qu'il existe un point y_0 de Y tel que pour tout voisinage ω de y_0 l'ensemble $\varphi(\omega)\cap X$ contient une infinité de points. Alors $\mathcal{K}(C(X), C(Y))$ et $\mathcal{F}(C(X), C(Y))$ ne sont pas des* M-*idéaux de $\mathcal{L}(C(X), C(Y))$.*
(*b*) *Pour tout compact infini X les espaces $\mathcal{K}(C(X))$ et $\mathcal{F}(C(X))$ ne sont pas des* M-*idéaux de $\mathcal{L}(C(X))$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{K}(T)$ l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{K}(C(X), C(Y))$ qui réalisent la meilleure approximation de T. Le lemme 4 montre que $\mathcal{K}(T)$ est inclus dans l'ensemble des opérateurs compacts tels que $S(f)(y_0)=0$ pour tout f de $C(X)$. Or d'après [6], si l'on était en présence d'un M-idéal, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{K}(T)$ coïnciderait avec $\mathcal{K}(C(X), C(Y))$. La même démonstration s'applique pour $\mathcal{F}(C(X), C(Y))$. La deuxième assertion se démontre par la même méthode en utilisant (c) du théoréme 5 et le fait que puisque X est infini il existe nécessairement un point non isolé dans X.

Ainsi chaque fois que les deux compacts X, Y vérifient les conditions (a) ou (b) du théorème 5, alors $\mathcal{K}(C(X), C(Y))$ et $\mathcal{F}(C(X), C(Y))$ ne sont pas des M-idéaux de $\mathcal{L}(C(X), C(Y))$. Rappelons que (a) est réalisée automatiquement si X est métrisable et $X\subset Y$.

COROLLAIRE 7. *Soit X un compact séparable alors $\mathcal{K}(C(X), l^\infty)$ et $\mathcal{F}(C(X), l^\infty)$ ne sont pas des* M-*idéaux de $\mathcal{L}(C(X), l^\infty)$.*

DÉMONSTRATION. Soit (x_n) une suite dense dans X et x_0 un point non isolé de X qui n'appartient pas à la suite (x_n). Soient φ la surjection de $Y=\check{\mathbb{N}}$ sur X qui est l'extension de l'application naturelle $n\to x_n$, et y_0 un point de Y tel que $\varphi(y_0)=x_0$. Si l'on identifie $\check{\mathbb{N}}$ à l'ensemble des ultrafiltres sur $\mathbb{N}$ muni de sa topologie classique, tout voisinage ω de y_0 contient une partie

$$\check{A}=\{\mathcal{U}\in\check{\mathbb{N}};\, A\in\mathcal{U}\}$$

où A est une partie infinie de A. Ainsi $\varphi(\omega)\supset(x_n)_{n\in A}$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème 5(b) et la conclusion provient du théorème 6.

Dans la suite nous nous attachons à l'étude de $\mathcal{L}(C(X))$ et plus particulièrement à la recherche des éléments extrêmaux de $\mathcal{K}(I)$ où I est l'identité de $C(X)$. Si X n'a pas de points isolés on sait d'après le théorème 5 que $\mathcal{K}(I)=\{0\}$. Cependant, dans le cas général la situation est différente. Le fait suivant est simple et sera utile dans la suite.

LEMME 8. *Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Banach E. Soient e un*

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-059-3 Published online by Cambridge University Press

point de E; et $\mathcal{P}(e)$ l'ensemble des points de F qui rèalisent la meilleure approximation de e. Alors f est extrêmal dans $\mathcal{P}(e)$ dès que $e-f$ est extrêmal dans la boule fermée de E de centre 0 et de rayon $d(e, F)$.

PROPOSITION 9. *Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ l'ensemble des points isolés de X. Un opérateur T de $\mathcal{K}(I)$ (resp. $\mathcal{F}(I)$), où I est l'identité de $C(X)$, est extrêmal dans $\mathcal{K}(I)$ (resp. $\mathcal{F}(I)$) si et seulement s'il existe un point isolé x tel que*

$$T(f)(x) = 2f(x_\alpha)1_{x_\alpha}(x); \qquad \forall x \in X; \qquad \forall f \in C(X)$$

où $1_{x_\alpha}(.)$ est la fonction caractéristique de x_α.

DÉMONSTRATION. Soit T_α l'opérateur de rang 1 dans $\mathcal{L}(C(X))$ associé à un point extrêmal x et défini par

$$T_\alpha(f) = 2f(x_\alpha)1_{x_\alpha}; \qquad \forall f \in C(X).$$

Il est clair que $\|I - T_\alpha\| = 1$ ce qui montre que T_α est dans $\mathcal{K}(I)$ et de plus T_α est extrêmal dans $\mathcal{K}(I)$. Sinon, il existe un opérateur S dans $\mathcal{K}(I)$ tel que $T_\alpha \pm S$ appartient à $\mathcal{K}(I)$. Ainsi, d'après le lemme 2 on a $\|I - T_\alpha \pm S\| = 1$. Si t_α et s sont les fonctions qui représentent les opérateurs T_α et S respectivement, on a pour tout x dans X l'inégalité

$$\|\varepsilon(x) - t_\alpha(x) \pm s(x)\| \leq 1.$$

Mais ceci implique que s est identiquement nulle puisque $\varepsilon(x) - t_\alpha(x)$ est extrêmal dans la boule unité de $M(X)$ sachant que:

$$t_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \neq x_\alpha \\ 2(x_\alpha) & x = x_\alpha \end{cases}$$

Inversement, soient T un opérateur de $\mathcal{K}(I)$ et t la fonction qui le représente. D'après le théorème 5, la fonction t est nulle en tout point non isolé de X. Supposons que T n'est pas de la forme d'un T_α pour un point x_α isolé dans X. Il existe alors un point isolé x_0 tel que $\varepsilon(x_0) - t(x_0)$ n'est pas extrêmal dans $B(M(X))$. Il existe donc une mesure dans cette boule unité telle que

$$\|\varepsilon(x_0) - t(x_0) \pm \mu\| \leq 1.$$

Soit S l'opérateur de $\mathcal{K}(C(X))$ défine par

$$S(f)(x) = \mu(f)1x_0(x); \qquad \forall x \in X; \qquad \forall f \in C(X).$$

Il est clair que l'on a $\|I - T \pm S\| \leq 1$. Ainsi $I - T$ n'est pas extrêmal dans la boule unité de $\mathcal{L}(C(X))$ et d'après la remarque précédente l'opérateur T ne peut être extrêmal dans $\mathcal{K}(I)$. La même preuve s'applique quand on remplace $\mathcal{K}(C(X))$ par $\mathcal{F}(C(X))$.

La proposition suivante généralise le résultat de [8].

PROPOSITION 10. (a) *Soit X un compact qui possède au plus n points isolés (n*

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-059-3 Published online by Cambridge University Press

fini), alors il n'existe pas de projection contractante sur un sous-espace fermé de codimension finie supérieure à n.

(b) Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré relatif à une mesure μ qui possède au plus n atomes, alors il n'existe pas de projection contractante de norme 1 sur un sous-espace de dimension finie supérieure à n.

DÉMONSTRATION. (a) soient M un sous-espace fermé de $C(X)$ de codimension finie et P une projection de norme 1 de $C(X)$ sur M. L'opérateur $S=I-P$ est compact et appartient à $\mathcal{K}(I)$. D'après le théorème 5 l'opérateur S vérifie

$$S(f)(x)=0; \qquad \forall f \in C(X); \qquad \forall x \in X, \quad x \text{ non isolé.}$$

Ainsi, si $(x_i)_{i=1}^n$ forme l'ensemble des points isolés de X, l'espace $S'(M(X))$ est inclus dans le sous-espace engendré par $(s(x_i)_{i=1}^n$. L'espace $S(C(X))$ est par conséquent de dimension inférieure ou égale à n. La codimension de M est donc inférieure ou égale à n.

(b) Le dual de l'espace $L^1(\mu)$ est isomorphe à un espace $C(Z)$ où Z est un compact hyperstonien. De plus, les points isolés de Z sont en bijection avec les atomes de la mesure μ. Si P est une projection de norme 1 sur un sous-espace de dimension finie M de $L^1(\mu)$ alors P' est une projection de norme 1 de $C(Z)$ sur l'annulateur M° de M. Comme la codimension de M° est inférieure ou égale à n, il en est de même de la dimension de M.

THEOREME 11. *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré tel que $L^1(\mu)$ soit de dimension infinie. Alors $\mathcal{K}(L^1(\mu))$ et $\mathcal{F}(L^1(\mu))$ ne sont pas des* M*-idéaux de l'espace $\mathcal{L}(L^1(\mu))$.*

DÉMONSTRATION. On notera I_L (resp. I_c) l'identité de $L^1(\mu)$ (resp. $C(Z)$ où $C(Z)$ est isométrique au dual de $L^1(\mu)$). Par transposition il est clair que

$$1=d[I_c, \mathcal{K}(C(Z))]\le d[I_L, \mathcal{K}(L^1(\mu))]\le 1,$$
$$1=d[I_c, \mathcal{F}(C(Z))]\le d[I_L, \mathcal{F}(L^1(\mu))]\le 1.$$

Soit S un opérateur de $\mathcal{K}(L^1(\mu))$ tel que $\|I_L-S\|=1$; par conséquent son transposé S' vérifie $\|I_c-S'\|=1$ et d'après le théorème 5 on a

$$(*) \qquad S'(f)(z)=0; \qquad \forall f \in C(Z); \qquad z \text{ non isolé dans } Z.$$

Si $\mathcal{K}(L^1(\mu))$ était un M-idéal dans $\mathcal{L}(L^1(\mu))$ il serait, d'après [6], algébriquement engendré par $\mathcal{K}(I_L)$ et par transposition, tous les opérateurs de $\mathcal{K}(C(Z))$ qui sont faiblement continus seraient dans l'espace engendré par $\mathcal{K}(I_c)$. Mais l'on peut toujours construire un opérateur de rang 1 qui est faiblement continu sur $C(Z)$ et qui ne vérifie pas l'égalité $(*)$. La même démonstration s'applique pour prouver que $\mathcal{F}(L^1(\mu))$ n'est pas un M-idéal dans $\mathcal{L}(L^1(\mu))$.

Le résultat suivant concernant $Co(I)$ est à l'opposé de ce que nous avons pour les espaces $C(X)$.

THEOREME 12. *Soit V un espace de Banach, alors $\mathcal{K}(V, Co(I))$ est un* M-*idéal dans $\mathcal{L}(V, Co(I))$.*

DÉMONSTRATION. On utilisera le fait [1] que l'adhérence d'une réunion filtrante croissante de M-idéaux est un M-idéal. Soit P_A la projection de $Co(I)$ sur le sous-espace engendré par $(e_i)_{i\in A}$ où A est une partie finie de I. La projection P_A vérifie

$$\|(x_i)\| = \|P_A(x_i)\| \vee \|(x_i) - P_A(x_i)\|; \qquad \forall x_i \in Co(I).$$

Soit $\tilde{P}_A$ la projection de $\mathcal{L}(V, Co(I))$ définie pour tout T de $\mathcal{L}(V, Co(I))$ par: $\tilde{P}_A \circ T$. Alors pour tout opérateur T de $\mathcal{L}(V, Co(I))$ on a l'égalité

$$\|T\| = \|\tilde{P}_A(T)\| \vee \|T - \tilde{P}_A(T)\|.$$

En effect, P_A et $I - P_A$ sont de normes inférieures à 1; par conséquent, le premier terme de l'égalité précédente est supérieur au second. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un vecteur (x_i) de la sphère unité de $Co(I)$ tel que $\|T\| \le \|T(x_i)\| + \varepsilon$. Pour ce vecteur on a

$$\|T\| \le \|P_A T(x_i)\| \vee \|T(x_i) - P_A T(x_i)\| + \varepsilon,$$

ce qui montre bien que l'on a

$$\|T\| \le \|\tilde{P}_A(T)\| \vee \|T - \tilde{P}_A(T)\|$$

Ainsi, d'après [1] le sous-espace de $\mathcal{L}(V, Co(I))$ qui est l'image de la projection $\tilde{P}_A$ est un M-idéal. Or il est clair que $\mathcal{K}(V, Co(I))$ est l'adhérence de la réunion de ces sous-espaces où A parcourt l'ensemble des parties finies de I. Ceci achève la preuve.

Signalons que dans [7] les auteurs établissent par une méthode différente un résultat équivalent concernant les espaces $\mathcal{K}(V, C(X \| X'))$ où $C(X \| X')$ désigne le sous-espace de $C(X)$ formé des fonctions nulles sur l'ensemble X' des points d'accumulation de X. Cependant, l'espace $C(X \| X')$ s'identifie à $Co(I)$ où I est le cardinal des points isolés de X. Ainsi le résultat de [7] est équivalent au résultat précédent.

En relation avec l'article [5] il reste le problème de la détermination si oui ou non l'espace $\mathcal{K}(L^p(\mu))$ est un M-idéal dans $\mathcal{L}(L^p(\mu))$ où μ comporte une partie diffuse et $1 < p < \infty$. Il reste aussi le problème de déterminer s'il existe un couple de compacts X et Y tels que $\mathcal{K}(C(X), C(Y))$ ou $\mathcal{F}(C(X), C(Y))$ soit un M-idéal dans $\mathcal{L}(C(X), C(Y))$.

Aprés la rédaction de cet article j'ai appris que A. Lima a résolu la question précédente en établissant que si μ possède une partie diffuse alors $\mathcal{K}(L^p(\mu))$ n'est pas un M-idéal de $\mathcal{L}(L^p(\mu))$.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Alfsen and E. Effros, *Structure in real Banach spaces*, Ann. of Math. **96** (1972), 98–173.
2. D. Amir and B. Arbel, *On injections and surjections in continuous function spaces*, Israel J. Math. **15** (1973), 301–310.

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-059-3 Published online by Cambridge University Press

3. H. Fakhoury, *Existence d'une projection continue de meilleure approximation dans certains espaces de Banach*, J. Math. Pures et Appl. **53** (1974), 1–16.

4. A. Grothendieck, *Les applications linéaires faiblement compactes d'espaces de type* $C(X)$, Canad. J. Math. **5** (1953), 129–173.

5. A. Hennfeld, *Decomposition for* $B(X)$ *and unique Hahn–Banach extensions*, Pacific J. Math. **46** (1973), 197–199.

6. R. Holmes, B. Scranton and J. Ward, *Approximation from the space of compact operators and other* M*-ideals*, Duke Math. J. **42** (1975), 259–269.

7. J. Mach and J. Ward, *Approximation by compact operators on certain Banach spaces*, J. Approximation theory (à paraître).

8. D. Wulbert, *Projections of norm* 1 *on* $C(X)$, Notices Amer. Math. Soc. **15** (1968), 362.

9. A. Daugavet, *A property of completely continuous functions on the space C*, Uspehi Math. Nauk. **18** (1963), 157–158.

Equipe d'Analyse
Département de Mathématiques
Université de Paris VI
2, Place Jussieu
75005-Paris.

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-059-3 Published online by Cambridge University Press