SUR LA STRUCTURE DE DEUX CLASSES D'ANNEAUX

A. Barbeau

(received January 21, 1963)

Dans un mémoire paru en 1960 [1], G. Thierrin a étudié la structure d'une classe d'anneaux, celle des anneaux bipotents à droite. Ce travail fait suite à ce mémoire et a pour objet d'étudier, dans un première partie, la structure d'une classe particulière d'anneaux bipotents à droite, celle des anneaux complètement bipotents à droite. Dans une deuxième partie, nous nous proposons d'étudier la structure d'une autre classe d'anneaux, celle des anneaux d-bipotents à droite.

I. PREMIÈRE PARTIE

1. Anneaux complètement bipotents à droite. D'après (1), un anneau A est dit bipotent à droite si l'on a $A = a^2A$, pour tout $a \in A$. Soient K un corps quelconque[1)] et (K, K) l'ensemble des couples (a, b) d'éléments de K. On définit dans (K, K) une addition et une multiplication de la manière suivante:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (a c, a d) .$$

Vis-à-vis de ces deux opérations, l'ensemble (K, K) est un anneau bipotent à droite, qui est appelé le pseudo-carré à droite du corps K. Tout anneau isomorphe au pseudo-carré à droite d'un corps est dit un pseudo-corps à droite. Tout anneau bipotent à droite est isomorphe à une somme sous-

1) Nous appelons corps tout anneau tel que l'ensemble des éléments non nuls forme un groupe pour la multiplication.

Canad. Math. Bull. vol. 6, no. 3, September 1963

https://doi.org/10.4153/CMB-1963-032-7 Published online by Cambridge University Press

directe d'anneaux appartenant à l'une des catégories suivantes: anneaux de carré nul, corps, pseudo-corps à droite.

Un anneau A est dit complètement bipotent à droite si tous ses sous-anneaux sont des anneaux bipotents à droite.

Remarquons que les corps finis sont des exemples d'anneaux complètement bipotents à droite. Remarquons, de plus, que le corps des nombres rationnels n'est pas un corps complètement bipotent à droite puisque le sous-anneau des entiers n'est pas un anneau bipotent à droite.

Cette définition étant posée, on vérifie facilement les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 1. Pour qu'un corps K soit complètement bipotent à droite, il faut et il suffit que tout sous-anneau $A \neq 0$ de K soit un corps.

Remarquons, à la suite de cette proposition, qu'un corps complètement bipotent à droite K est de caractéristique finie p, p étant un nombre premier.

PROPOSITION 2. Tout image homomorphe B d'un anneau complètement bipotent à droite A est un anneau complètement bipotent à droite.

2. Structure des anneaux complètement bipotents à droite. Un anneau complètement bipotent à droite est évidemment bipotent à droite. Il est donc isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux qui sont, soit des anneaux de carré nul, soit des corps, soit des pseudo-corps à droite.

Un élément a d'un anneau A est dit d'ordre fini pour la multiplication si le demi-groupe cyclique engendré par a est fini. Pour un anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes [2]:

(1) Pour tout $a \in A$ il existe un entier $n > 1$, dépendant de a, tel que $a^n = a$.

(2) Tout élément de A est d'ordre fini pour la multiplication et A ne contient pas d'éléments nilpotents différents de zéro.

On sait que tout anneau ayant le propriété (1) est commutatif [3].

PROPOSITION 3. Tous les éléments d'un corps complètement bipotent à droite K sont d'ordre fini pour la multiplication. Un corps complètement bipotent à droite est donc commutatif.

K étant un corps de caractéristique finie, son corps premier P est fini. Soit $a \in K$, $a \neq 0$. Considérons l'anneau $A(a)$ engendré par a. $A(a)$ est un corps, d'après la proposition 1. Puisque l'élément unité 1 de K appartient à $A(a)$ il existe une représentation de la forme

$1 = \pm a^k \pm a^\ell \pm a^m \pm \ldots$ (avec un nombre fini de termes. $k, \ell, m, \ldots,$ étant des entiers positifs). Il s'en suit que

$a = \pm a^{k+1} \pm a^{\ell+1} \pm a^{m+1} \pm \ldots$ et $a \mp a^{k+1} \mp a^{\ell+1} \mp a^{m+1} \mp \ldots = 0.$

Par conséquent, a est un élément algébrique sur son corps premier P. $A(a)$ est donc une extension algébrique simple de P et par suite $A(a)$ est un corps fini. Par conséquent, l'élément a est d'ordre fini pour la multiplication. Il existe donc un entier $n \geq 1$ tel que l'on ait $a^n = 1$. D'où $a^{n+1} = a$. Il s'en suit alors immédiatement que K est commutatif.

THÉORÈME 1. Pour qu'un anneau complètement bipotent à droite A soit commutatif il faut et il suffit que tout image homomorphe de A ne soit pas un pseudo-corps à droite.

La condition est évidemment nécessair, puisqu'un pseudo-corps à droite n'est jamais commutatif. La condition est suffisante. En effet, A étant un anneau bipotent à droite, il est alors isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux qui sont, soit des anneaux de carré nul, soit des corps. Les corps apparaissant dans la représentation sont, d'après la proposition 2, complètement bipotents à droite. Ils sont alors commutatifs, d'après la proposition 3. Le résultat est alors immédiat.

D'après [4], si E et K désignent deux corps commutatifs tels que $K \subseteq E$, pour que E soit algébrique sur K, il faut et il suffit que tout anneau A tel que $K \subseteq A \subseteq E$ soit un corps.

https://doi.org/10.4153/CMB-1963-032-7 Published online by Cambridge University Press

Un anneau A est dit primitif [5], s'il existe dans A un idéal à droite modulaire maximal D tel que $D.\cdot A = 0$, $D.\cdot A$ désignant l'ensemble des éléments x de A tels que $ax \in D$ pour tout $a \in A$. Pour qu'un anneau A soit un corps, il faut et il suffit qu'il soit primitif et bipotent à droite [1].

THÉORÈME 2. Un anneau A est un corps dont tous les éléments sont d'ordre fini pour la multiplication si et seulement si A est primitif et complètement bipotent à droite.

La condition est nécessaire A étant un corps, il est évidemment primitif. D'autre part A est un corps commutatif et A est algébrique sur son corps premier P; Tout sous-anneau $\neq 0$ de A contient P. Donc, tout sous-anneau $\neq 0$ de A est un corps. Il suit alors de la proposition 1 que A est complètement bipotent à droite. La condition est suffisante. A étant primitif et bipotent à droite, il est un corps. C'est donc un corps complètement bipotent à droite. La conclusion découle alors immédiatement de la proposition 3.

II. DEUXIÈME PARTIE

1. Anneaux d-bipotents à droite. Un anneau A est dit d-bipotent a droite, si l'on a $aA = Aa^2$ pour tout $a \in A$. On voir facilement qu'un anneau A est d-bipotent à droite, si et seulement si pour tout couple d'éléments $a, b \in A$ il existe $x, y \in A$ tels que l'on ait $ab = xa^2$ et $ay = ba^2$.

Voici quelques exemples d'anneaux d-bipotents à droite.

(1) Les corps[1)] et les sommes directes de corps.

(2) Les anneaux de carré nul.

(3) Tout anneau A vérifiant les relations suivantes: $aA = Aa$ et $aA \subseteq Aa^2$ pour tout $a \in A$.

1) Nous appelons corps tout anneau tel que l'ensemble des éléments non nuls forme un groupe pour la multiplication.

Remarquons que si A est un anneau d-bipotent à droite, on a (1.1) $Aa^n = a^{n/2}A$ pour tout $a \in A$ et tout entier positif pair. Et (1.2) $Aa^n = a^{(n-1)/2}Aa$ pour tout $a \in A$ et tout entier positif impair plus grand que un.

PROPOSITION 1. Dans un anneau d-bipotent à droite A, tout idéal premier P est complètement premier [6].

Il suffit de montrer que P est un idéal complètement semi-premier [6]. Supposons que $a^2 \in P$. P étant un idéal ou doit avoir $Aa^2 \subseteq P$. Mais $aA = Aa^2$. On a donc $aA \subseteq P$ et $aAa \subseteq P$. Mais P étant un idéal premier on doit avoir $a \in P$. Par conséquent, P est un idéal complètement semi-premier, il est donc complètement premier.

Rappelons que le radical de McCoy d'un idéal quelconque d'un anneau A est l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux appartenent à cet idéal. A la suite de cette proposition, remarquons que dans un anneau d-bipotent à droite A le radical de McCoy d'un idéal quelconque est identique à son radical compressif [6].

PROPOSITION 2. Pour qu'un anneau d-bipotent à droite A (non réduit à zéro) soit un corps, il faut et il suffit que l'idéal (0) soit premier.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. L'idéal (0) étant premier, il est, d'après la proposition 1, complètement premier. A est donc un anneau sans diviseur de zéro. Soit a un élément quelconque non nul de A. Il existe $x \in A$ tel que l'on ait $a^2 = xa^2$. A étant sans diviseur de zéro, on doit avoir $a = xa$. D'où $xa = x^2a$ et $x = x^2$. Comme A est sans diviseur de zéro, x est élément unité de A. D'autre part soit $a \in A$, $a \neq 0$, il existe $y \in A$ tel que l'on ait $a = ax = ya^2$. D'où $a = (ya)a$ et $x = ya$. Il s'en suit alors immédiatement que A est un corps.

On démontre alors facilement les deux corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. Pour qu'un anneau A soit un corps, il faut et il suffit qu'il soit primitif [3] et d-bipotent à droite.

COROLLAIRE 2. Si J désigne le radical de Jacobson [3] d'un anneau d-bipotent à droite A et si J est distinct de A, l'anneau-quotient A/J est isomorphe à une somme sous-directe de corps.

Si a est un élément nilpotent d'un anneau d-bipotent à droite A, il suit de (1.1) et (1.2) que $a^2 = 0$ ou $a^3 = 0$. De plus, si a est un élément nilpotent de A, la relation $Aa^3 = aAa$ entraîne $ara = 0$ pour tout $r \in A$.

PROPOSITION 3. L'ensemble N des éléments nilpotents d'un anneau d-bipotent à droite A est un idéal et $N^3 = 0$. De plus, cet ensemble est identique au radical compressif, donc au radical de McCoy [6] de l'anneau A (N est donc un idéal compressif).

Montrons, en premier lieu, que N est un idéal compressif. En effet, tout élément du radical de McCoy étant nilpotent et tout élément nilpotent appartenant au radical compressif de A, cette première partie de la démonstration découle alors de l'égalité de ces deux radicaux dans un anneau d-bipotent à droite. Montrons, en dernier lieu, que $N^3 = 0$. Soient $a, b, c \in N$. Il existe alors $x, y \in A$ tels que l'on ait $ab = xa^2$ et $ac = ya^2$. D'où $abc = (ab)c = (xa^2)c = (xa)(ac) = (xa)(ya^2) = x(aya)a = 0$, puisque $ara = 0$ pour tout $r \in A$. Par conséquent, $N^3 = 0$.

On démontre alors facilement les trois corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. Si tous les éléments d'un anneau d-bipotent à droite A sont nilpotents, alors A est un anneau de carré nul.

COROLLAIRE 2. Un anneau d-bipotent à droite A (non réduit à zéro) sans éléments nilpotents différents de zéro est isomorphe à une somme sous-directe de corps.

https://doi.org/10.4153/CMB-1963-032-7 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 3. Si J désigne le radical de Jacobson d'un anneau d-bipotent à droite A, alors J contient l'idéal N des éléments nilpotents de A (donc le radical compressif T de A).

PROPOSITION 4. Tous idéal à gauche G d'un anneau d-bipotent à droite A est un idéal bilatère.

En effet, soient $a \in G$, $r \in A$. Il existe $x \in A$ tel que l'on ait $ar = xa^2$. Mais $xa^2 \in G$. Par conséquent $ar \in G$ et G est un idéal bilatère.

2. Caractérisation d'une certaine classe d'anneaux d-bipotents à droite. On démontre facilement la proposition suivante:

PROPOSITION 5. Si A est un anneau d-bipotent à droite sans éléments nilpotents différents de zéro, alors pour tout $a \in A$ il existe $x \in A$ tel que l'on ait

$$a^2 = xa^2 = a^2x^2 = axax = axa = a^2x .$$

A la suite de Divinski posons la définition suivante:

Définition. Un élément a d'un anneau A est dit D-régulier s'il existe $x, y \in A$ tels que l'on ait $a = xa = ay$.

On démontre alors facilement la proposition suivante:

PROPOSITION 6. Tout élément a d'un anneau d-bipotent à droite A sans éléments nilpotents différents de zéro, est D-régulier.

Un anneau A est dit régulier si pour tout $a \in A$ il existe $x \in A$ tel que l'on ait $a = axa$. Le radical de Jacobson J d'un anneau régulier A se réduit à zéro [7].

THÉORÈME 1. Pour qu'un anneau d-bipotent à droite A soit régulier, il faut et il suffit que son radical compressif T soit réduit à zéro (c'est-à-dire qu'il soit sans éléments nilpotents différents de zéro).

https://doi.org/10.4153/CMB-1963-032-7 Published online by Cambridge University Press

La condition est nécessaire. D'après la proposition 3 le radical compressif T de A est formé de l'ensemble des éléments nilpotents de A. Il est donc, d'après le corollaire 3 de la proposition 3, contenu dans le radical de Jacobson J de A. A étant régulier, son radical de Jacobson se réduit à zéro. D'où la conclusion, puisque $T \subseteq J$. La condition est suffisante. Soit $a \in A$. D'après la proposition 6, a est un élément D-régulier. Il existe donc un élément $x \in A$ tel que l'on ait $a = ax$. De plus, puisque A est d-bipotent à droite, il exist $y \in A$ tel que l'on ait $a = ax = ya^2 = (ya)a$. D'après [2], on doit avoir $a = aya$. Par conséquent, A est un anneau régulier.

Un anneau A tel que pour tout $a \in A$, il existe $x \in A$ vérifiant l'égalité $a = a^2x$ est un anneau bipotent à droite [1].

THÉORÈME 2. Si le radical de Jacobson J d'un anneau d-bipotent à droite A se réduit à zéro, alors A est bipotent à droite.

D'après le corollaire 3 de la proposition 3, A est sans éléments nilpotents différents de zéro. D'après le théorème 1, A est alors un anneau régulier. Il existe alors $y \in A$, tel que l'on ait $a = aya$. D'après (2), on doit avoir $a = a^2y$. Il s'en suit alors immédiatement que A est bipotent à droite.

COROLLAIRE. Si J désigne le radical de Jacobson d'un anneau d-bipotent à droite A, alors l'anneau-quotient A/J est bipotent à droite.

Si T désigne le radical compressif d'un anneau A, alors l'anneau-quotient A/T est compressif [1]. Si J désigne le radical de Jacobson d'un anneau A et si I est un idéal de A tel que l'anneau-quotient A/I soit sans radical de Jacobson alors $J \subseteq I$ [3].

PROPOSITION 7. Dans un anneau d-bipotent à droite A le radical de Jacobson J de A coïncide avec son radical compressif T (c'est-à-dire avec l'ensemble des éléments nilpotents de A).

D'après le corollaire 3 de la proposition 3, $T \subseteq J$. Montrons que $J \subseteq T$. Considérons l'anneau-quotient A/T.

https://doi.org/10.4153/CMB-1963-032-7 Published online by Cambridge University Press

C'est un anneau compressif, donc un anneau sans éléments nilpotent différents de zéro. Puisque A/T est un anneau d-bipotent à droite, il est, d'après le théorème 1, un anneau régulier, donc un anneau sans radical de Jacobson. Il s'en suit alors immédiatement que $J \subseteq T$. Par conséquent $J = T$.

A la suite de cette proposition, remarquons que le radical de Jacobson J d'un anneau d-bipotent à droite A est un idéal nilpotent.

3. <u>Structure des anneaux d-bipotents à droite.</u>

THÉORÈME 3. Si J désigne le radical de Jacobson d'un anneau d-bipotent à droite A et si J est distinct de A, alors J est contenu dans un idéal bilatère de la forme[2] $A(1-e)$ où e est un élément idempotent différent de zéro appartenant à A.

D'après la remarque qui suit la proposition 7, J est un nil idéal. Par conséquent, A est un anneau SBI [3]. D'après la proposition 7 et le théorème 1, l'anneau-quotient $\bar{A} = A/J$ est un anneau régulier. $\bar{A}$ est différent de zéro, puisque J est distinct de A. Soit $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{a} \neq 0$. $\bar{A}$ étant un anneau régulier, il existe $\bar{x} \in \bar{A}$ tel que l'on ait $\bar{a} = \bar{a}\,\bar{x}\,\bar{a}$. L'élément $\bar{u} = \bar{a}\,\bar{x}$ est alors un élément idempotent différent de zéro appartenant à $\bar{A}$. Puisque A est un anneau SBI, il existe $e \in A$ tel que $e^2 = e$ et $\bar{e} = \bar{u}$. Evidemment, l'élément e est différent de zéro. Considérons maintenant la décomposition suivante de A [3]: $A = Ae \oplus A(1-e)$. D'après la proposition 4 les idéaux à gauche Ae et $A(1-e)$ sont bilatères. Soit $a \in J$ (a est un élément nilpotent). A étant un anneau d-bipotent à droite, il existe $x \in A$ tel que l'on ait $ae = xa^2$. On a alors $ae = aee = (xa^2)e = (xa)(ae) = (xa)(xa^2) = x(axa)a = 0$, puisque $ara = 0$ pour tout $r \in A$. Par conséquent, $a \in A(1-e)$. Il s'en suit alors immédiatement que J est contenu dans l'idéal bilatère $A(1-e)$.

Tout anneau bipotent à droite A sous-directement irréductible est, soit un anneau de carré nul, soit un corps,

---

2) Si a est un élément fixé d'un anneau A, ou désigne d'après Jacobson [3] (meme si A ne contient pas d'élément unité) par $A(1-a)$ l'idéal à gauche $\{x - xa \mid x \in A\}$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1963-032-7 Published online by Cambridge University Press

soit un pseudo-corps à droite [1]. Un pseudo-corps à droite contient des éléments nilpotents différents de zéro.

PROPOSITION 8. Tout anneau d-bipotent à droite A sous-directement irréductible est, soit un anneau de carré nul, soit un corps.

Soit J le radical de Jacobson de A. Deux cas peuvent se présenter.

(1) $J = A$.

(2) J est distinct de A.

Si $J = A$, alors, d'après la proposition 7 et le corollaire 1 de la proposition 3, A est un anneau de carré nul. Supposons donc que J est distinct de A. D'après le théorème 3, il existe un élément idempotent e différent de zéro appartenant à A tel que l'on ait $A = Ae \oplus A(1-e)$, $J \subseteq A(1-e)$ et où les idéaux à gauche Ae et $A(1-e)$ sont bilatères. On a évidemment $e \in Ae$. On doit donc avoir $A(1-e) = 0$, puisque A est sous-directement irréductible. Il s'en suit que $J = 0$. D'après le théorème 2, A est alors un anneau bipotent à droite. Par conséquent, A étant sous-directement irréductible, il est, soit un corps, soit un pseudo-corps à droite. Mais $J = 0$ entraîne, d'après la proposition 7, que A est sans éléments nilpotents différents de zéro. Donc A est un corps, puisqu'un pseudo-corps à droite contient des éléments nilpotents différents de zéro.

THÉORÈME 4. Tout anneau d-bipotent à droite A est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux appartenant à l'une des catégories suivantes: anneaux de carré nul, corps.

En effet, tout anneau d-bipotent à droite est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux sous-directement irréductibles et d-bipotents à droite. Le résultat découle alors immédiatement de la proposition 8.

https://doi.org/10.4153/CMB-1963-032-7 Published online by Cambridge University Press

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Thierrin, Sur la structure d'une classe d'anneaux, Can. Math. Bull. vol. 3, no. 1, janvier (1960), 11-16.

2. G. Thierrin, Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 32, fasc. 2, (1957), 93-112.

3. N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 37 (1956).

4. N. Bourbaki, Eléments de mathématique, chapitre V, corps commutatifs, Actualités Sci. Ind. no. 1102, Paris, 1950.

5. N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math., 67 (1945), 300-320.

6. G. Thierrin, Sur les idéaux complètement premiers d'un anneau quelconque, Bull. Acad. Royale Belgique, 43 (1957), 124-132.

7. N.H. McCoy, Rings and ideals, Carus Mathematical Monographs, No. 8, 1948.

Université Laval