SUR LES APPLICATIONS LINEAIRES FAIBLEMENT COMPACTES D'ESPACES DU TYPE $C(K)$

A. GROTHENDIECK

Introduction

1. Sujet. Soit K un espace compact, $C(K)$ l'espace des fonctions complexes continues sur K, muni de la norme uniforme, $\mathfrak{M}^1(K)$ son dual (espace des mesures de Radon sur K). Cet article est consacré essentiellement à l'étude des applications linéaires faiblement compactes de $C(K)$ dans des espaces localement convexes F quelconques i.e. les applications linéaires qui transforment la boule unité de $C(K)$ en une partie faiblement relativement compacte de F. Un mécanisme élémentaire de transposition montre qu'une telle étude est essentiellement équivalente à l'étude des parties faiblement relativement compactes de l'espace de Banach $\mathfrak{M}^1(K)$ (c'est à dire, si on pose $E = C(K)$, des parties de E' qui sont relativement $\sigma(E', E'')$-compactes). C'est sous cette dernière forme de la théorie que l'on saisit le mieux la raison des théorèmes qu'on obtient; à ce titre, les théorèmes 2 et 3 forment la clef de tout ce travail. Cependant, les énoncés correspondants en termes d'applications linéaires continues u de l'espace $C(K)$ dans un espace localement convexe F, sont plus frappants et plus directement adaptés aux diverses applications. Les énoncés les plus importants sont: u est faiblement compacte si et seulement si elle transforme suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes (théorème 4); ou si elle transforme suites de Cauchy faibles en suites *faiblement* convergentes (ce qui constitue une partie du théorème 6). Les applications de ces résultats sont assez nombreuses, les plus importantes sont les théorèmes 7 et 7 bis (*toute* application linéaire continue d'un espace du type $C(K)$ dans un espace du type L^1 est faiblement compacte), le théorème 8, qui donne des propriétés remarquables d'une vaste classe d'opérations linéaires continus entre espaces localement convexes quelconques, le corollaire 2 de la proposition 10, donnant des indications tout à fait spéciales sur la "sommation vague" dans un espace de mesures de Radon. Enfin, le §4 donne des propriétés curieuses spéciales à certains espaces du type $C(K)$ particuliers: quand K est un espace compact "stonien", on obtient la propriété très spéciale indiquée dans le lemme 8 (théorème 9); quand K est homéomorphe à une suite convergente comprenant son point limite, donc si $C(K)$ est isomorphe à l'espace c_0 des suites de nombres complexes qui tendent vers zéro, nous montrons que les diverses propriétés envisagées dans les paragraphes précédents restent encore valables pour les sous-espaces et espaces quotients de $C(K) \approx c_0$.

Le mode d'exposition suivi est axiomatique, en ce qu'il analyse d'abord en termes abstraits les propriétés que nous avons en vue, qui servent ensuite à

Reçu le 3 mars, 1952.

délimiter des classes remarquables d'espaces (propositions 1, 1 bis, 8, 12 et définitions 1, 2, 3, 4, 6). On voit ainsi mieux la raison des choses, et cela permet d'obtenir en passant de nombreux autres espaces jouissant de propriétés analogues à celles des espaces $C(K)$.

2. Le cadre. Ce travail aurait pu se traiter sans sortir du cadre des espaces de Banach. Comme cela n'apporterait en fait aucune simplification dans l'exposé et les démonstrations, en restreignant inutilement la portée des résultats, nous avons préféré nous placer dans le cadre des espaces localement convexes généraux. D'ailleurs, nous n'avons aucunement essayé de mettre un minimum d'hypothèses dans les énoncés. Ainsi, *toutes* les fois que nous supposons un espace localement convexe complet, il suffirait de supposer que ses parties bornées et fermées sont complètes. De même, toutes les fois que nous supposons qu'un espace est un espace du type $(\mathfrak{F})$, c'ést pour pouvoir appliquer le théorème de Šmulian, alors qu'on sait que ce théorème vaut sous des conditions sensiblement plus larges (voir par exemple [**8**]). — Nous supposons connues les méthodes générales exposées dans [**3**], et ferons notamment un usage fréquent des théorèmes de Šmulian et d'Eberlein. Par ailleurs, nous employons sans références les résultats élémentaires de la théorie de la mesure, en nous plaçant exclusivement dans le cadre des mesures de Radon: une mesure sera toujours pour nous une forme linéaire sur l'espace des fonctions continues à support compact sur un espace localement compact donné. Pour les résultats moins connus sur la topologie faible dans les espaces L^1, on pourra consulter l'esposé contenu dans la première partie du travail [**4**].

3. Notations. De façon générale, nous suivons les notations des "Elements" de N. Bourbaki. Nous appelerons cependant espace précompact, tout espace uniforme A tel que l'espace uniforme séparé associé ait une complétion compacte; A peut donc ne pas être séparé. Le critère usuel de précompacité par la possibilité de recouvrements finis "arbitrairement fins", est encore valable. — Si H est un ensemble d'applications d'un espace topologique E dans un espace uniforme F, et $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E, nous appellerons $\mathfrak{S}$-convergence, la structure uniforme sur H de la convergence uniforme sur les parties $A \in \mathfrak{S}$. En particulier, si A est une partie de E, la A-convergence sera la structure uniforme (non séparée en général) de la convergence uniforme sur A. H est précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence, si et seulement si pour tout $A \in \mathfrak{S}$, H est précompact pour la A-convergence, et H est précompact pour la A-convergence si et seulement si l'ensemble des applications de A dans F défini par les restrictions des $f \in H$ à A, est précompact pour la convergence uniforme.

Pour les espaces localement convexes, nous suivons la terminologie de [**3**]. En particulier, si E est un espace localement convexe, E' est son dual, $\langle x, x' \rangle$ désigne l'accouplement entre E et E', E'' le bidual de E' (dual de E' muni de la topologie forte). Mais il y aura lieu de considérer comme topologie "naturelle" sur E'' la topologie de la convergence uniforme sur les parties *équicontinues* de E' (et non sur les parties fortement bornées de E'). Cette topologie induit

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

sur E la topologie propre de E. Si E est séparé et complet, c'est un sous-espace vectoriel *fermé* de E''. — Une application linéaire d'un espace localement convexe E dans un autre F est dite *compacte* (resp. *précompacte, faiblement compacte*) si elle transforme un voisinage convenable de l'origine en une partie de F qui est relativement compacte (resp. précompacte, faiblement relativement compacte).

C désigne le corps complexe. Sauf spécification contraire, M est un espace localement compact, $C_0(M)$ l'espace des fonctions continues sur M qui "s'annulent à l'infini", muni de la norme uniforme, $\mathfrak{M}^1(M)$ son dual (espace des mesures de Radon bornées sur M) $C(M)$ l'espace de toutes les fonctions complexes continues sur M, muni de la topologie de la convergence compacte. K désignera un espace compact; alors $C_0(K) = C(K)$. Par topologie faible dans $\mathfrak{M}^1(M)$, nous entendrons la *topologie faible* définie par le dual de l'espace de Banach $\mathfrak{M}^1(M)$, en réservant le terme de *topologie vague* à la topologie faible du dual de $C_0(M)$. Quand nous parlerons de la topologie faible d'une espace L^∞ construit sur une mesure $\mathfrak{M}$, il s'agira au contraire toujours de la topologie faible du dual de L^1 (dual qu'on peut identifier à L^∞ en vertu du théorème de Lebesgue-Nikodym).

§1. Une propriété des applications linéaires faiblement compactes de certains espaces

1.1 Préliminaires. Dans [**7**], Dunford et Pettis prouvent, pour les espaces L^1 construits sur des cubes euclidiens, le théorème suivant: toute application linéaire faiblement compacte d'un tel espace dans un espace de Banach transforme parties faiblement compactes en parties compactes. En fait, il n'est pas difficile, soit à partir de ce résultat particulier, soit en reprenant et généralisant la méthode de Dunford-Pettis, de démontrer ce même résultat pour les espaces L^1 quelconques. Nous allons en donner ici une démonstration beaucoup plus simple et directe, ayant l'avantage de mettre en évidence les propriétés de L^1 qui interviennent réellement dans le théorème envisagé. Cela nous permettra en même temps d'établir le même théorème pour d'autres catégories importantes d'espaces, et notamment les espaces $C(K)$ (espace des fonctions continues sur un espace compact K, muni de la topologie de la convergence uniforme), et de reconnaître que ce théorème est lié à une propriété qui semble nouvelle (prop. 2).

Nous commençons par établir trois lemmes élémentaires sur les espaces localement convexes généraux, généralisant des propriétés bien connues des applications linéaires faiblement compactes ou compactes entre espaces de Banach, et que nous utiliserons constamment par la suite.

Lemme 1. *Soit u une application linéaire d'un espace localement convexe E dans un autre F, supposé séparé. Les quatre conditions suivantes sont toutes équivalentes:*

(1) *u transforme les parties bornées de E en parties faiblement relativement compactes de F.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

(2) *La bitransposée u'' de u applique E'' dans F.*

(3) *u'' transforme les parties équicontinues de E'' (considéré comme dual de E' fort) en parties faiblement relativement compactes de F.*

(4) *La transposée u' de u est une application continue de F' muni de la topologie de Mackey $\tau(F', F)$ dans E' fort (ou aussi: de F' faible dans E' muni de la topologie $\sigma(E', E'')$).*

Cela implique:

(5) *u' transforme les parties faiblement compactes de F' en parties $\sigma(E', E'')$-compactes de E'.*

Réciproquement, si F est complet, pour que les conditions équivalentes 1 *à* 4 *soient vérifiées, il suffit déjà qu'on ait*

(5 bis) *u' transforme les parties équicontinues et faiblement fermées de F' en parties $\sigma(E', E'')$-compactes de E'.*

(*Donc si F est complet,* toutes *les conditions précédentes sont équivalentes.*)

Démonstration. Rappelons que E'' est la réunion des adhérences faibles dans E'' des parties bornées de E, adhérences qui sont d'ailleurs faiblement compactes et constituent un système fondamental de parties équicontinues de E''; et que u'' s'obtient en prolongeant u en une application de E'' dans F'' par continuité faible. Si donc u transforme les parties bornées A de E en parties faiblement relativement compactes de F, elle transforme leurs adhérences faibles dans E'' en parties faiblement relativement compactes *dans* F, (1) implique donc (2) et (3). Réciproquement, (2) et *a fortiori* (3) implique (1), u'' étant faiblement continue et les parties équicontinues de E'' faiblement relativement compactes. Donc les conditions (1) à (3) sont équivalentes. De plus, le premier énoncé dans (4) signifie que tout ensemble équicontinu de formes linéaires sur E' fort donne, en composant avec u', un ensemble équicontinu de formes linéaires sur F' muni de $\tau(F', F)$, c'est à dire précisément (3). De même, le deuxième énoncé dans (4) est manifestement équivalent à (2), ce qui prouve que toutes les conditions de (1) à (4) sont équivalentes. Le deuxième énoncé dans (4) implique évidemment (5). Reste à voir que (5 bis) implique (2) quand F est complet; mais (5 bis) signifie aussi que u'' est continue quand E'' est muni de la topologie $\tau(E'', E')$, et F'' de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F', — topologie qui induit sur F sa topologie propre. Or E est dense dans E'' pour $\tau(E'', E')$, puisque toute forme linéaire continue sur E'' qui s'annule sur E est nulle, et F étant complet, est un sous-espace *fermé* de F''. Comme u'' applique E dans F, il suit par continuité que u'' applique E'' dans F.

LEMME 2. *Soit une application linéaire continue d'un espace localement convexe E dans un autre F, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Pour tout $A \in \mathfrak{S}$, $u(A)$ est précompact.*

(2) *Pour toute partie équicontinue B' de F', $u'(B')$ est une partie de E' précompacte pour la $\mathfrak{S}$-convergence.*

Démonstration. (1) signifie aussi que la transposée u' est continue, quand on munit F' de la topologie T_c de la convergence uniforme sur les parties précompactes de F, et E' de la topologie $T(\mathfrak{S})$ de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathfrak{S}$. Comme toute partie équicontinue de F' est précompacte pour la topologie T_c (conséquence bien connue du théorème d'Ascoli) il suit bien que (1) implique (2). On en déduit aussitôt que (2) implique (1), en désignant par $\mathfrak{T}$ l'ensemble des parties équicontinues de F', et en échangeant les rôles de u, u' et $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$.

Remarque. Si la topologie $T(\mathfrak{S})$ est séparée sur E' (c'est à dire si la réunion des $A \in \mathfrak{S}$ est totale dans E) alors on peut dans l'énoncé (2) remplacer le mot "précompact" par "relativement compact", comme il résulte aussitôt de la démonstration (les parties équicontinues et faiblement fermées de F' étant T_c-compactes).

LEMME 3. *Soient E, E' deux espaces vectoriels en dualité faible, A une partie faiblement bornée de E, A' une partie faiblement bornée de E'. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *A' est précompact pour la A-convergence.*

(1′) *A est précompact pour la A'-convergence.*

(2) *Sur A', la structure uniforme faible est plus fine que la structure uniforme de la A-convergence.*

(2′) *Sur A, la structure uniforme faible est plus fine que la structure uniforme de la A'-convergence.*

De plus, si A (resp. A') est convexe symétrique, on peut remplacer dans l'énoncé (2′) (resp. dans 2) les structures uniformes par les topologies correspondantes.

De toutes façons, les conditions équivalentes précédentes impliquent que l'ensemble des $\langle x, x'\rangle$ ($x \in A, x' \in A'$) est borné, et que la fonction $\langle x, x'\rangle$ sur

$$A \text{ faible} \times A' \text{ faible}$$

est uniformément continue.

Enfin, si E est un espace ($\mathfrak{F}$) et si A est faiblement compact, les conditions équivalentes précédentes sont aussi équivalentes à:

(3) *Toute suite faiblement convergente extraite de A converge uniformément sur A'.*

Démonstration. On a (1) $\to$ (2′), car si A'_A désigne A' muni de la structure uniforme de la A-convergence, l'ensemble $\tilde{A}$ des fonctions sur A'_A définies par les $x \in A$ est par définition même uniformément équicontinu, on sait donc que sur $\tilde{A}$, la structure uniforme de la convergence simple (dans A'_A) est identique à la structure uniforme de la convergence uniforme sur l'espace *précompact* A'_A, d'où résulte bien (2′).

On a (2′) $\to$ (1′), car A est précompact pour la structure uniforme faible, et *a fortiori* pour toute structure uniforme moins fine.

Par symétrie, on aura donc aussi (1′) $\to$ (2) et (2) $\to$ (1), ce qui établit l'équivalence des quatre conditions envisagées. L'uniforme continuité de $\langle x, x'\rangle$ sur A faible $\times A'$ faible en résulte immédiatement, car $\langle x, x'\rangle$ est de toutes façons uniformément continu sur le produit $A_{A'} \times A'_A$, or ici A faible est plus fin que $A_{A'}$, A' faible plus fin que A'_A. Il en suit aussi que l'ensemble des $\langle x, x' \rangle$ $(x \in A, x' \in A')$ est partie précompacte, donc bornée, du corps des scalaires, comme image de l'espace précompact A faible $\times A'$ faible par une application uniformément continue.

Le fait que l'on peut dans l'énoncé (2) remplacer les structures uniformes par les topologies lorsque A est convexe symétrique résulte du facile résultat suivant:

Soit A une partie convexe symétrique d'un espace vectoriel E, T et T' deux topologies localement convexes sur E (ici, la topologie de la A'-convergence, resp. la topologie faible de E). *Alors, pour que T et T' induisent sur A la même structure uniforme il suffit déjà qu'elles induisent le même système de voisinages de zéro.*

En effet, un système fondamental d'entourages de la structure uniforme induite par T, par exemple, est obtenu en prenant, pour tout voisinage V de zéro pout T, l'ensemble des $(x, y) \in A \times A$ tels que $x - y \in V$. Or, A étant convexe symétrique, on aura $x - y \in 2A$, de sorte que la relation ci-dessus s'écrit aussi $x - y \in 2A \cap V$, soit aussi $\frac{1}{2}(x - y) \in A \cap \frac{1}{2}V$. Donc un système fondamental d'entourages est obtenu en prenant pour tout voisinage de zéro U induit par T sur A, l'ensemble des $(x, y) \in A \times A$ tels que $\frac{1}{2}(x - y) \in U$. Le résultat annoncé en résulte aussitôt.

Le lecteur remarquera que dans les démonstrations précédentes les structures vectorielles n'interviennent pas en fait (sauf pour la dernière).

Il est évident que (2′) implique (3); réciproquement, si E est du type $(\mathfrak{F})$ et si A est faiblement compact, (3) implique (1′). Il suffit de montrer que de toute suite extraite de A on peut extraire une suite qui converge uniformément sur A', mais d'après le théorème de Šmulian, on peut en effet extraire une suite qui converge *faiblement.*

Remarque. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties faiblement bornées A de E, A' une partie faiblement bornée de E'. On sait que, pour que A' soit précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence, il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, A' soit précompact pour la A-convergence. Le lemme 3 donne alors diverses autres conditions équivalentes, que nous ne repèterons pas. Si on suppose donné aussi un ensemble $\mathfrak{S}'$ de parties faiblement bornées de E', alors le lemme 3 donne l'équivalence des conditions suivantes: (1) Tout $A' \in \mathfrak{S}'$ est précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence; (2) sur tout $A' \in \mathfrak{S}'$, la structure uniforme faible est plus fine que la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence; et les deux énoncés symétriques. Enfin, dans le cas où E est un espace $(\mathfrak{F})$, on peut énoncer aussi le

COROLLAIRE. *Soit E un espace $(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties faiblement compactes de E, A' une partie bornée de E'. Alors A' est précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence si et seulement si toute suite faiblement convergente extraite d'un $A \in \mathfrak{S}$ converge uniformément sur A'. En particulier, une partie A' de E' est relativement compacte pour la topologie $\tau(E', E)$ si et seulement si toute suite faiblement convergente dans E converge uniformément sur A'* (c'est à dire, dans la terminologie de G. Köthe, si A' est "*begrenzt*" dans la dualité avec E).

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

La dernière partie du corollaire résulte du théorème de Krein (l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un faiblement compact est faiblement compacte).

1.2 La propriété de Dunford-Pettis.

PROPOSITION 1. *Soit E un espace localement convexe, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Les hypothèses suivantes sont équivalentes:*

(1) *Pour tout espace localement convexe séparé F, toute application linéaire continue de E dans F qui transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes, transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en parties précompactes;*

(2) *Même énoncé, mais F étant supposé un espace de Banach;*

(3) *Les $A \in \mathfrak{S}$ sont précompacts pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties de E' équicontinues, convexes, cerclées et $\sigma(E', E'')$-compactes; ou une des formes équivalentes, d'après le lemme* 3, *à la condition* (3), *en particulier:*

(4) *Toute partie équicontinue convexe cerclée et $\sigma(E', E'')$-compacte de E' est précompacte pour la $\mathfrak{S}$-convergence.*

Démonstration. On a évidemment (1) $\rightarrow$ (2).

(2) $\rightarrow$ (3). Soit E_T l'espace E muni de la topologie T de la convergence uniforme sur les parties équicontinues, convexes, cerclées et $\sigma(E', E'')$-compactes de E'. Comme tout espace localement convexe, E_T est isomorphe à un sous-espace vectoriel d'un produit topologique d'espaces de Banach F_i, de telle sorte que pour établir qu'une partie $A \in \mathfrak{S}$ est précompacte dans E_T, il suffit de montrer que toute application linéaire continue u de E_T dans un espace de Banach F transforme A en une partie précompacte de F (en fait, ce raisonnement suppose E_T séparé, mais on se libère trivialement de cette restriction). Mais u sera *a fortiori* application continue de E dans F, et sa transposée u', application linéaire de F' dans E', applique de plus les parties équicontinues de F' en parties de E' qui sont équicontinues en tant que parties du dual de E_T, donc $\sigma(E', E'')$-compactes. Donc (lemme 1) u transforme parties bornées de E en parties faiblement relativement compactes de F, donc par hypothèse transforme $A \in \mathfrak{S}$ en une partie précompacte de F.

(3) $\rightarrow$ (1). On peut évidemment supposer l'espace F de l'énoncé de (1) *complet*. Soit u une application linéaire continue de E dans F transformant parties bornées en parties faiblement rel. compactes, soit $A \in \mathfrak{S}$; il faut montrer que $u(A)$ est précompact. Mais A étant par hypothèse précompact pour la topologie T définie plus haut (topologie qui donne encore pour dual E' d'après le théorème de Mackey), il suffit de prouver que u est continue de E_T dans F. Il revient au même de dire que u' transforme parties équicontinues convexes cerclées faiblement compactes de F' en parties équicontinues du dual de E_T, c'est à dire en parties équicontinues et $\sigma(E', E'')$-compactes du dual de E. Mais cela est vrai, car u étant continue de E dans F, u' transforme parties équicontinues de F' en parties équicontinues de E', qui de plus sont ici relativement $\sigma(E', E'')$-compactes en vertu du lemme 1.

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

DÉFINITION 1. *On dit que l'espace localement convexe E jouit de la propriété de Dunford-Pettis* (*en abrégé, propriété* D.-P.), *s'il satisfait à l'une des hypothèses équivalentes de la proposition* 1, *où* $\mathfrak{S}$ *désigne l'ensemble des parties de E convexes cerclées et faiblement compactes.*

Cela signifie donc aussi que les applications linéaires continues de E dans un espace localement convexe séparé quelconque qui transforment les ensembles bornés en parties faiblement relativement compactes, transforment les parties faiblement compactes convexes cerclées de E en parties précompactes, donc compactes puisqu'elles sont faiblement compactes (et par suite complètes); ou encore que les parties équicontinues, convexes, cerclées, $\sigma(E', E'')$-compactes de E' sont aussi $\tau(E', E)$-compactes. (Voir remarques plus bas.)

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 1. *Si E' fort jouit de la propriété* D.-P., *il en est de même de E, pourvu que les parties fortement bornées de E' soient équicontinues* (*en particulier, si E est un espace* ($\mathfrak{F}$))

En effet, grace à la forme (4) de l'hypothèse D.-P. sur E' fort, cette hypothèse s'énonce; les parties convexes cerclées A du dual E'' de E' fort qui sont équicontinues (i.e. contenues dans l'adhérence faible dans E'' d'une partie bornées de E) et $\sigma(E'', E''')$-compactes, sont compactes pour la topologie $\tau(E'', E')$. Ici, E'' désigne le dual fort de E' fort. Mais E'' induisant sur E la topologie de E par hypothèse, l'énoncé précédent vaut en particulier si A est une partie convexe cerclée et faiblement compacte de E, ce qui établit le corollaire en vertue de la forme (3) de la propriété D.-P.

Remarques. (a) Dans les énoncés (1) à (3), on peut remplacer le mot "précompact" par "compact" si on suppose les $A \in \mathfrak{S}$ faiblement compacts. En effet, on sait qu'une partie précompacte et faiblement compacte d'un espace vectoriel localement convexe F est compacte, car une partie faiblement compacte est complète (fait bien connu, et qui se vérifie immédiatement en considérant E comme un espace de formes linéaires sur E'). Notons aussi que dans le cas où la réunion des $A \in \mathfrak{S}$ est partie totale de E, donc que sur E' la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence est séparée, (4) signifie aussi que toute partie convexe, cerclée, équicontinue et $\sigma(E', E'')$-compacte de E' est *compacte* pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

(b) Rappelons que d'après un résultat de Krein pour espaces de Banach, généralisé dans [**9**] aux espaces localement convexes quelconques, l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une partie faiblement compacte est elle-même faiblement compacte, si (et seulement si) elle est complète (pour la topologie donnée sur E), en particulier chaque fois que E est complet. Cela permet, si E est complet, de supprimer le mot "convexe cerclé" dans l'explicitation que nous avons donné après la définition 1. Cela permet aussi, dans tous les cas, de supprimer dans les énoncés (3) et (4) de la proposition 1, l'hypothèse que les parties envisagées de E' sont convexes cerclées; car je dis que si A' est une partie équicontinue, $\sigma(E', E'')$-compacte de E', son enveloppe convexe cerclée fortement fermée est encore $\sigma(E', E'')$-compacte, et évidemment équicontinue.

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

En effet, il suffit de voir que cette enveloppe est fortement complète, or il est bien connu, et trivial à vérifier, que toute partie faiblement relativement compacte et fortement fermée de E' est fortement complète. Bien entendu, si E est un espace $(\mathfrak{F})$, on peut aussi supprimer dans les énoncés (3) et (4) l'hypothèse que les parties envisagées de E' sont équicontinues, puisqu'elles le sont automatiquement en tant que parties bornées.

Une propriété, analogue à la propriété D.-P. et plus forte dans les cas usuels, est mise en évidence dans la

PROPOSITION 1 BIS. *Soit E un espace localement convexe. Les hypothèses suivantes sont équivalentes:*

(1) *Pour tout espace localement convexe F, toute application linéaire continue u de E dans F qui transforme les parties bornées en parties faiblement relativement compactes, transforme les suites de Cauchy faibles en suites de Cauchy fortes dans F.*

(2) *Même énoncé, mais F étant supposé un espace de Banach.*

(3) *Toute suite de Cauchy faible dans E est suite de Cauchy pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues, convexes cerclées et $\sigma(E', E'')$-compactes de E'.*

(4) *Les parties de E' équicontinues, convexes, cerclées et $\sigma(E', E'')$-compactes sont compactes pour la topologie de la convergence uniforme sur les suites de Cauchy faibles de E.*

La démonstration est identique à celle de la proposition 1. Il suffit de remarquer qu'une suite de Cauchy faible est aussi suite de Cauchy pour la topologie envisagée dans (3), si et seulement si elle est précompacte pour cette topologie (lemme 3). — Notons aussi que l'énoncé (1) est équivalent au suivant: l'application envisagée u transforme parties bornées et faiblement métrisables A de E en parties précompactes de F (car c'est manifestement suffisant, réciproquement, comme A est de toutes façons faiblement précompact, de toute suite extraite de A on pourra extraire une suite de Cauchy faible, dont l'image sera suite de Cauchy forte dans F si on suppose (1) vérifié; mais d'après un résultat bien connu de A. Weil, cela implique que $u(A)$ est partie précompacte de F). — La proposition précédente conduit à poser la

DÉFINITION 2. *On dit que l'espace localement convexe E jouit de la propriété de Dunford-Pettis stricte (en abrégé, propriété* D.-P. *stricte) si les conditions équivalentes de la proposition* 1 *bis sont vérifiées.*

Si E est un espace $(\mathfrak{F})$, cette propriété est plus forte que la propriété D.-P. (lemme 3, corollaire). Les deux propriétés sont équivalentes si dans l'espace $(\mathfrak{F})$ envisagé, les suites de Cauchy faibles sont faiblement convergentes, par exemple pour les espaces L^1.

Nous verrons plus bas des applications intéressantes des propriétés D.-P. et D.-P. stricte, et notamment du fait que les espaces $C(K)$ et L^1 les possèdent (théorème 1). Signalons seulement pour l'instant que, si E jouit de la propriété

D.-P., et si u et v sont des endomorphismes de E transformant parties bornées en parties faiblement relativement compactes, alors l'application linéaire composée uv transforme parties bornées en parties relativement compactes. Si par exemple E est un espace de Banach, cela donne: le produit de deux endomorphismes faiblement compacts de E est un endomorphisme compact (résultat déjà signalé par Dunford et Pettis pour des espaces L^1). Il suit que la théorie de Riesz des endomorphismes compacts peut alors s'étendre aux endomorphismes faiblement compacts. — Notons en passant qu'un espace de Banach réflexif ne peut avoir la propriété D.-P. que s'il est de dimension finie, car sa boule unité devrait être précompacte.

Une autre propriété intéressante des espaces qui jouissent de la propriété D.-P., et qui ne semble pas avoir été mise en évidence jusqu'ici même dans le cas particulier des espaces $C(K)$ et L^1 est donnée par la

Proposition 2. *Soient E et F deux espaces localement convexes complets, G un espace localement convexe, u une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. Soit (x_i) une suite dans E faiblement convergente vers un $x_0 \in E$, (y_i) une suite dans F faiblement convergente vers un $y_0 \in F$. Si E jouit de la propriété* D.-P., *alors $u(x_i, y_i)$ tend faiblement vers $u(x_0, y_0)$.*

Démonstration. La conclusion signifie que pour tout $z' \in G'$, $\langle u(x_i, y_i), z'\rangle$ tend vers $\langle u(x_0, y_0), z'\rangle$, de sorte qu'on est ramené au cas où G est le corps de base R ou C (en considérant la forme bilinéaire $\langle u(x, y), z'\rangle$). Mais alors, il est bien connu et trivial qu'il existe une application linéaire continue v de F dans E' fort telle que $u(x, y) = \langle x, vy\rangle$. La suite des $x'_i = vy_i$ converge vers $x'_0 = vy_0$ au sens de $\sigma(E', E'')$, il faut montrer que $\langle x_i, x'_i\rangle$ tend vers $\langle x_0, x'_0\rangle$. En vertu de la forme (3) de la propriété D.-P. (proposition 1) il suffit de montrer que l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble des x_i (respectivement des x'_i dans E' faible) est faiblement compacte dans E (resp. $\sigma(E', E'')$-compacte). Pour la première, cela résulte de l'extension du théorème de Krein que nous avons déjà signalé après la définition 1; pour la seconde, il suffit d'appliquer le théorème de Krein *dans* F à la suite (y_i), et de conclure que l'image par v de l'enveloppe convexe cerclée fermée des y_i est $\sigma(E', E'')$-compacte.

Bien entendu, on aurait un énoncé légèrement renforcé si on suppose que E jouit de la propriété D.-P. stricte. Les réciproques sont d'ailleurs vraies quand E est un espace de Banach, comme il est facile de s'en convaincre en prenant pour u l'accouplement canonique entre E et E'. Si en effet E ne jouissait pas de la propriété, D.-P., il existerait une suite (x_i) dans E faiblement convergente vers zéro, et une partie $\sigma(E', E'')$-compacte A' de E', telles que (x_i) ne converge pas uniformément sur A'. On pourrait donc trouver $\epsilon > 0$, et une suite (x'_i) dans A', tels que $|\langle x_i, x'_i\rangle| > \epsilon$, et par extraction d'une suite partielle, on pourrait supposer que la suite (x'_i) est convergente pour $\sigma(E', E'')$ (grâce au théorème de Šmulian), ce qui établit notre assertion.

On voit aussi par là que la proposition 2 donne une propriété assez particulière aux hypothèses envisagées, puisqu'elle est déjà en défaut par exemple pour la forme bilinéaire canonique entre un espace de Banach de dimension infinie réflexif, et son dual.

1.3 Cas des espaces $C(K)$ et L^1. Nous arrivons au résultat essentiel de ce paragraphe (la deuxième partie du théorème étant essentiellement connue):

THÉORÈME 1. *L'espace E jouit de la propriété* D.-P. *stricte* (voir définitions 1 et 2) *dans chacun des deux cas suivants:*

(a) *E est un espace $C(K)$* (espace des fonctions continues sur un espace compact K, muni de la topologie de la convergence uniforme).

(b) *E est un espace L^1 construit sur une mesure arbitraire.*

Démonstration. Comme dans un espace L^1 les suites de Cauchy faibles sont faiblement convergentes, il suffit de démontrer la propriété D.-P. pour L^1 pour prouver (b). Mais le dual de L^1 est L^∞ (théorème de Lebèsgue-Nikodym), il est donc isomorphe à un espace $C(K)$ d'après un théorème bien connu de Gelfand, de sorte qu'en vertu du corollaire de la proposition 1, nous pouvons nous borner à établir le théorème pour l'espace $C(K)$. Soit donc (f_i) une suite de Cauchy faible dans $C(K)$, c'est donc une suite uniformément bornée, et qui converge en chaque point $t \in K$ vers une limite $g(t)$ (la réciproque étant d'ailleurs vraie en vertu du théorème de Lebèsgue). g est une fonction borélienne et bornée sur K, donc intégrable pour toute mesure de Radon sur K. Nous voulons montrer que $\langle f_i, \mu\rangle$ tend vers une limite uniformément quand μ parcourt un ensemble A' de mesures de Radon compact pour la topologie $\sigma(E', E'')$. D'ailleurs, en vertu du théorème de Lebèsgue, cette limite ne peut être que l'intégrale $\int g\, d\mu$; si la convergence n'était pas uniforme, on pourrait de A' extraire une suite (μ_i) telle que sur cette suite, la convergence ne soit déjà pas uniforme. Mais il est bien connu que pour une *suite* de mesures de Radon sur K, il existe une mesure de Radon positive μ telle que toutes les μ_i de la suite appartiennent à l'espace des mesures définies par les éléments de $L^1(\mu)$. Comme $L^1(\mu)$ s'identifie, avec sa norme, à un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $\mathfrak{M}^1(K)$ de toutes les mesures sur K, la suite (μ_i) s'identifie ici à une suite faiblement relativement compacte de $L^1(\mu)$, soit (h_i). On est donc ramené à montrer que $\int f_i(t)h(t)d\mu(t)$ tend vers $\int g(t)h(t)d\mu(t)$ uniformément quand h parcourt une partie faiblement compacte de $L^1(\mu)$. Mais cela résulte du théorème d'Egoroff et du résultat plus fort suivant, qui a son intérêt propre:

PROPOSITION 3. *Soit μ une mesure de Radon positive sur l'espace localement compact M. Si la suite (f_i) dans $L^\infty(\mu)$ est uniformément bornée, et converge en mesure sur tout compact $K \subset M$ vers une $g \in L^\infty$, alors elle converge vers g au sens de la topologie $\tau(L^\infty, L^1)$, i.e. $\int f_i h d\mu$ tend vers $\int gh\, d\mu$ uniformément quand h parcourt une partie faiblement compacte de L^1* (pour une réciproque, voir corollaire 1 de la proposition 4).[1]

Démonstration. Soit A une partie faiblement compacte de L^1, et $\epsilon > 0$.

[1]Cette proposition et sa démonstration m'ont été suggérés par M. Dieudonné.

On sait (voir [4], théorème 4) qu'il existe un compact $K \subset M$ et un $\eta > 0$, tels que $h \in A$ implique

(a) $$\int_{\complement K} |h|\, d\mu \leqslant \epsilon,$$

(b) pour toute partie mesurable B de M telle que $\mu(B) \leqslant \eta$,

$$\int_B |h|\, d\mu \leqslant \epsilon.$$

Supposons $\|f_i\|^\infty \leqslant R$ pour tout i, on a alors, pour $h \in A$,

$$\left| \int f_i h d\mu - \int g h d\mu \right| = \left| \int (f_i - g) h\, d\mu \right| \leqslant \left| \int_{\complement K} (f_i - g) h\, d\mu \right| + \left| \int_K (f_i - g) h\, d\mu \right|.$$

Le premier terme est $\leqslant 2R\epsilon$. D'après l'hypothèse, la suite (f_i) converge uniformément vers g dans un compact $K_0 \subset K$ tel que $\mu(K \cap \complement K_0) \leqslant \eta$. Le deuxième terme est donc majoré par

$$2R\epsilon + \int_{K_0} |f_i - g|\, |h|\, d\mu$$

qui est $\leqslant 2R\epsilon + R' a_i$, où

$$R' = \sup_{h \in A} \|h\|_1, \quad a_i = \sup_{t \in K_0} |f_i(t) - g(t)|.$$

Comme a_i tend vers zéro pour i infini, on aura donc

$$\left| \int f_i h\, d\mu - \int g h\, d\mu \right| \leqslant 5R\epsilon \quad \text{pour } i \text{ assez grand},$$

ce qui établit la proposition 3.

Remarquons qu'en fait, la proposition 3, ainsi que ses corollaires, pourrait s'énoncer pour un filtre sur une partie bornée de L^∞, convergeant en mesure sur tout compact.

Corollaire 1 de la proposition 3. *Soit u une application linéaire faiblement continue (voir Introduction) de L^∞ dans un espace localement convexe séparé F. Alors u est faiblement compacte, et transforme toute suite de L^∞ qui est bornée et qui converge en mesure sur tout compact vers $g \in L^\infty$, en une suite fortement convergente (i.e. convergente pour la topologie donnée sur F) vers $u(g)$. Même conclusion si u est une application faiblement continue de L^∞ dans le dual G' d'un espace localement convexe G, qui transforme la boule de L^∞ en une partie $\sigma(E', E'')$-compacte de G'.*

En effet, dans le premier cas par exemple, comme la boule de L^∞ est faiblement compacte, il suite d'abord que son image par u est faiblement compacte, d'où (lemme 1) que u' transforme parties équicontinues de F' en parties faiblement relativement compactes de L^1, d'où résulte facilement la conclusion en vertu de la proposition 3. La deuxième partie du corollaire se démontre de façon analogue.

Un cas particulier du corollaire 1 est le corollaire suivant, qui généralise un théorème bien connu d'*Orlicz:*

COROLLAIRE 2. *Soit $\Phi(t)$ une application faiblement sommable de M dans un espace localement convexe F, (i.e. telle que pour $x' \in F'$, $\langle\Phi(t), x'\rangle$ soit fonction sommable) et telle que $\int \Phi f\, d\mu$ soit élément de F quelle que soit $f \in L^\infty$. Alors l'application $f \rightarrow \int \Phi f d\mu$ est faiblement compacte, et transforme toute suite bornée de L^∞ qui converge en mesure sur tout compact vers une $g \in L^\infty$, en suite fortement convergente vers $\int \Phi g\, d\mu$*

En effet, d'après la définition même de l'intégrale faible, l'application $f \rightarrow \int \Phi f\, d\mu$ est faiblement continue. — Une autre application analogue et plus profonde sera donnée au §2, proposition 10. Comparez aussi avec §2, théorème 5.

Donnons en passant une autre forme de la proposition 3:

PROPOSITION 4. *Soit μ une mesure de Radon positive sur l'espace localement compact M. Pour qu'une partie A de $L^\infty(\mu)$ soit $\tau(L^\infty, L^1)$-compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble A_K des restrictions à K des $f \in A$ soit partie compacte de L^1* (la restriction de f à K signifie ici la fonction nulle dans $\complement K$ qui coïncide avec f dans K).

Démonstration. (a) Nécessité. Soit $L_K{}^\infty$ l'ensemble des fonctions éléments de L^∞ qui sont nulles dans $\complement K$. Comme l'application: "restriction à K", est manifestement une application linéaire de L^∞ dans lui-même continue pour $\tau(L^\infty, L^1)$, A_K sera aussi partie τ-compacte de $L_K{}^\infty$. Comme la boule B_K de $L_K{}^\infty$ est partie faiblement compacte de L^1 (voir [**4**], théorème 4) A_K est donc aussi compact pour la topologie de la convergence uniforme sur B_K, considéré comme partie de L^1. Mais cette topologie sur $L_K{}^\infty$ n'est autre que la topologie induite par L^1.

(b) Suffisance. Supposons que A satisfasse aux conditions de la propostion 4, montrons que A est $\tau(L^\infty, L^1)$-compact. Il est d'abord très facile de vérifier que A est partie faiblement fermée donc faiblement compacte de L^∞, il suffit donc de montrer maintenant que si un filtre $\mathfrak{F}$ sur A converge faiblement vers g, il converge même uniformément sur toute partie B de L^1 qui est faiblement compacte. Mais A étant borné dans L^∞(soit $||f||_\infty \leqslant R$ si $f \in A$), on voit aussitôt qu'il suffit de vérifier que pour tout compact $K \subset M$, la restriction f_K de f à K converge vers g_K uniformémént sur B, suivant le filtre $\mathfrak{F}$; car on pourra trouver, pour $\epsilon > 0$ donné, un compact K tel que $h \in B$ implique

$$\int_{\complement K} |h|\, d\mu \leqslant \epsilon\,,$$

d'où

$$\left| \int_{\complement K} (f - g) h\, d\mu \right| \leqslant 2R\epsilon$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

pour $f \in A$. Nous sommes donc ramenés au cas où M est un compact K, et où A est une partie bornée de L^∞ compacte pour la topolgie T induite par L^1 Pour prouver qu'alors A est τ-compact, il suffit de montrer que l'application identique de A muni de T dans L^∞ muni de τ est continue. Comme A muni de T est métrisable, cela revient à dire que si la suite (f_i) extraite de A converge vers une limite g au sens de T, elle converge au sens de τ. Mais ce n'est autre que la proposition 3 (car on sait que (f_i) convergera aussi vers g en mesure).

Corollaire. *La condition suffisante donnée dans la proposition* 3 *pour qu'une suite dans* L^∞ *converge pour* $\tau(L^\infty, L^1)$ *est aussi nécessaire.* (Car une suite convergente pour τ est relativement compacte pour τ, d'autre part pour une suite uniformément bornée dans un espace L^∞ construit sur un compact, convergence au sens de L^1 et convergence en mesure sont identiques.)

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer l'analogue des corollaires 1 et 2 de la proposition 3, relativement à la proposition 4.

1.4 Application à d'autres espaces vectoriels. A partir du théorème 1, on obtient d'autres espaces vectoriels qui jouissent de la propriété D.-P. stricte. Tout d'abord, on a le

Corollaire du théorème 1. *Si M est un espace localement compact, l'espace $\mathfrak{M}^1(M)$ des mesures de Radon bornées sur M jouit de la propriété* D.-P. *stricte.*

En effet, d'après un théorème de S. Kakutani [**11**], $\mathfrak{M}^1(M)$ est isomorphe à un espace L^1. — En particulier, le dual $\mathfrak{M}^1(K)$ d'un espace $C(K)$ est isomorphe à un espace L^1; à cette occasion, signalons qu'inversement, comme nous l'avons rappelé plus haut, le dual d'un espace L^1 est isomorphe à un espace $C(K)$. Cette dualité remarquable entre les espaces du type L^1 et espaces du type $C(K)$ est souvent utile, et nous servira encore dans la suite de cet article.

D'autres applications du théorème 1 sont obtenues à l'aide de la

Proposition 5. *Un facteur direct d'un espace qui jouit de la propriété* D.-P. (*resp. de la propriété* D.-P. *stricte*) *jouit de la même propriété. Le produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces qui jouissent de la propriété* D.-P. (*resp. de la propriété* D.-P. *stricte*) *jouit de la même propriété.*

La démonstration est triviale.—On fera attention qu'on n'a rien d'analogue pour les sous-espaces ou les espaces quotients, même dans le cas des espaces de Banach; on sait en effet que *tout* espace de Banach est isomorphe (avec sa norme) à un sous-espace d'un espace $C(K)$, et à un espace quotient d'un espace L^1. Cette réflexion nous donne un grand nombre d'exemples où un sous-espace vectoriel fermé d'un espace $C(K)$ où L^1 n'a pas de supplémentaire, puisqu'on a le

Corollaire. *Un espace de Banach qui ne satisfait pas à la propriété D.P. stricte ne peut être isomorphe à un facteur direct d'un espace L^1 ou $C(K)$. En* *particulier, il en est ainsi pour les espaces de Banach réflexifs de dimension infinie.*

Généralisons d'abord le théorème 1 à une classe analogue d'espaces.

PROPOSITION 6. (a) *Soit M un espace normal, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de M, $C(M, \mathfrak{S})$ l'ensemble des fonctions continues sur M et bornées sur les $A \in \mathfrak{S}$, muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. Cet espace jouit de la propriété* D.-P. *et de la propriété* D.-P. *stricte.*

(b) *Soit M un espace localement compact muni d'une mesure μ, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties mesurables et relativement compactes de M, soit $\mathfrak{L}(\mu,\mathfrak{S})$ l'espace des fonctions localement sommables sur M, muni de la topologie de la convergence en moyenne sur les $A \in \mathfrak{S}$. Cet espace jouit de la propriété* D.-P. *et de la propriété* D.-P. *stricte.*

Démontrons par exemple (a), la démonstration est toute analogue pour (b). Supposons les $A \in \mathfrak{S}$ fermés et l'ensemble $\mathfrak{S}$ filtrant, ce qui est loisible. Il faut montrer que si un filtre $\mathfrak{F}$ dans $E = C(M, \mathfrak{S})$ est soit le filtre élémentaire associé à une suite de Cauchy faible, soit un filtre faiblement convergent sur une partie faiblement compacte de E, alors ce filtre converge uniformément sur toute partie A' du dual E' qui est équicontinue et $\sigma(E', E'')$-compacte. A' étant partie équicontinue, il existe un voisinage V de zéro dans E, défini par exemple par: $|f(t)| \leqslant 1$ pour $t \in A$ (A étant une partie fixée de M, élément de $\mathfrak{S}$) sur lequel les $\mu \in A'$ soient majorés en module par une constante k. Soit $f \to uf$ l'opération de restriction à A; M étant normal, c'est une application linéaire continue de $C(M, \mathfrak{S})$ *sur* l'espace $F = C^{\infty}(A)$ des fonctions continues *bornées* sur A (muni de la norme de la convergence uniforme), et qui applique V *sur* la boule de C^{∞} (A). Sa transposée u' est donc une application linéaire continue *biunivoque* de F' dans E', appliquant la boule de F' *sur* le polaire V° de V. Donc toute $\mu \in A'$ provient d'une $\tilde{\mu} \in F'$ et d'une seule, Montrons que l'ensemble $\tilde{A}$ de ces $\tilde{\mu}$ est une partie de F' qui est $\sigma(F', F'')$-compacte, il suffit pour ce de montrer que u' est isomorphisme fort de F' dans E', ou, ce qui revient au même, qu'il existe une partie bornée B de E dont l'image par u soit dense dans la boule de F. Mais en vertu du théorème d'Urysohn, on peut en effet prendre pour B l'ensemble des $f \in E$ qui sont en module inférieures à 1 sur tout M. — Pour montrer maintenant que

$$\lim_{\mathfrak{F}} \langle f, \mu \rangle$$

existe, uniformément quand μ parcourt A', on écrit $\langle f, \mu \rangle = \langle uf, \tilde{\mu} \rangle$, et on note que, puisque u est continue, l'image de $\mathfrak{F}$ par u est un filtre dans F qui est soit filtre élémentaire associé à une suite de Cauchy faible dans F, soit filtre faiblement convergent sur une partie faiblement compacte de F. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 1 a), car on sait que $C^{\infty}(A)$ s'identifie à l'espace $C(K)$ sur le compactifiée de Stone-Čech K de l'espace A [**14**].

PROPOSITION 7. *Soit O un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et soit $\mathfrak{E}^{(m)}(O)$ l'espace des fonctions dans O, m fois continûment différentiables, muni de la topologie de la convergence* *compacte de f et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre m. Cet espace jouit de la propriété* D.-P. *stricte. Il en est de même de l'espace analogue $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$ construit sur un cube compact K de $\mathbf{R}^n$.*

Moyennant la proposition 5 et 6, cela résulte du

LEMME 4. *Considérons $\mathfrak{E}^{(m)}(O)$ comme sous-espace du produit vectoriel topologique*

$$\prod_{|p|\leqslant m} C_p$$

d'espaces ($\mathfrak{F}$) tous identiques à l'espace $C(O)$ des fonctions continues sur O, muni de la topologie de la convergence compacte, - grace à l'isomorphisme $f \longrightarrow (D^p f)_{|p| \leqslant m}$ de $\mathfrak{E}^{(m)}(O)$ dans ce produit ($p = (p_1, \ldots, p_n)$ désignant un indice de dérivation multiple d'ordre $|p|$,

$$D^p = \partial^p/\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}).$$

Alors il est facteur direct dans ce produit. Enoncé analogue pour l'espace $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$ construit sur un cube compact K de $\mathbf{R}^n$, quand cet espace est considéré comme sous-espace du produit topologique

$$\prod_{|p|\leqslant m} C_p$$

d'espaces tous identiques à $C(K)$.

Démonstration. Donnons la par exemple pour l'espace $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$.[2] Soit 0 un point de l'intérieur du cube K, soit E_0 le sous-espace de $E = \mathfrak{E}^{(m)}(K)$ formé des f telles que $D^p f(0) = 0$ pour $|p| \leqslant m - 1$. C'est un sous-espace vectoriel de E de codimension finie, il suffit donc de montrer que E_0 est facteur direct dans

$$\prod_{|p|\leqslant m} C_p$$

[2] *Note ajoutée pendant la correction des épreuves.* La démonstration du lemme 4 dans le cas d'un ouvert O n'est aussi simple que si O est par exemple convexe. Sinon, la démonstration est un peu plus compliquée, mais il n'est pas difficile de se ramener "au local" par les méthodes standart de partitions de l'unité.

Remarquons aussi que dans le cas où K est un cube compact, on a même un résultat plus fort que le fait que $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$ soit isomorphe à un facteur direct d'un espace $C(K')$. En effet, *alors $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$ est isomorphe à $C(K)$.* La démonstration est facile si K est le segment $K_0 = (0, 1)$: alors, si H est le sous-espace de codimension 1 de $\mathfrak{E}^{(m)}(K_0)$ formé des fonctions nulles en 0 ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m - 1$, l'application $f \longrightarrow f^{(m)}$ de H dans $C(K_0)$ est évidemment un isomorphisme du premier espace sur le second; d'autre part il est bien connu que la somme directe de $C(K_0)$ avec un espace de dimension 1, donc aussi avec un espace de dimension finie m, est isomorphe à $C(K_0)$. D'autre part, si le théorème annoncé est vrai pour un compact K, il en résulte facilement que pour tout espace de Banach E, les espaces de Banach $\mathfrak{E}^{(m)}(K, E)$ et $C(K, E)$ sont isomorphes (car isomorphes resp. à l'espace des applications linéaires compactes et faiblement continues de E' dans $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$ et $C(K)$). Faisant en particulier $E = \mathfrak{E}^{(m)}(K_0) \approx C(K_0)$, on trouve que $\mathfrak{E}^{m(}(K \times K_0)$ est isomorphe à $C(K \times K_0)$. Le théorème annoncé apparait maintenant par récurrence sur la dimension de K. — Le théorème analogue est vrai, avec la même démonstration, pour R^n au lieu de K. J'ignore si on peut même remplacer R^n par n'importe quelle variété indéfiniment différentiable.

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

c'est à dire qu'il existe une projection continue u de $\Pi\, C_p$ sur E_0. On posera $u((f_p)_p) = (g_p)_p$, les g_p étant définies en fonction du système $(f_p)_p$ de la façon suivante:

$$g_p = f_p \qquad\qquad \text{si } |p| = m,$$

$$g_p(x) = \int_{0x} g_{p+\alpha_1}(t_1)\, dt_1 + \ldots + g_{p+\alpha_n}(t_n)\, dt_n \qquad\qquad \text{si } |p| < m,$$

où α_i désigne l'indice de dérivation correspondant à l'opérateur $\partial/\partial x_i$ (toutes ses composantes sont nulles, sauf la *iéme*, égale à 1), et $0x$ est le segment orienté joignant 0 à x. (Rappelons qu'on ajoute les indices de dérivation en ajoutant leurs composantes.) Il est évident de proche en proche que les g_p sont des applications linéaires continues de $\Pi\, C_p$ dans C_p. De plus on aura $g_p(0) = 0$ pour $|p| < m$, et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_p = g_{p+\alpha_i}.$$

Il en résulte que u est bien une projection continue sur E_0.

Remarques. Bien entendu, le même raisonnement vaut pour l'espace $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$ construit sur un compact K quelconque, pourvu que sa frontière ne soit pas trop compliquée; où pour l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur une variété m fois différentiable, et les espaces de champs de tenseurs analogues, par les méthodes standard de passage au local. Il n'est peut-être pas inutile de remarquer, en vue de l'application de la proposition 7, que l'on a la caractérisation suivante des suites de Cauchy faibles (et partant, des suites faiblement convergentes) dans $\mathfrak{E}^{(m)}(O)$ et $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$, critère résultant immédiatement de l'immersion dans le produit topologique d'espaces $C(O)$ (resp. $C(K)$): (f_i) est suite de Cauchy faible dans $\mathfrak{E}^{(m)}(O)$ (resp. $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$) si et seulement si elle est bornée, et si pour tout $t \in O$ (resp. tout $t \in K$) et tout indice de dérivation multiple p d'ordre $\leqslant m$, la suite des $D^p f_i(t)$ est convergente. La suite (f_i) converge faiblement vers g si et seulement si on a de plus $\lim D^p f_i(t) = D^p g\ (t)$.

Un exemple. Comme nous l'avons remarqué, un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach jouissant de la propriété D.-P., ou un espace quotient d'un tel espace, peut ne pas jouir de la propriété D.-P. On pourrait supposer toute fois qu'on ait l'énoncé suivant: Tout espace quotient d'un espace $C(K)$ jouit de la propriété D.-P. D'après le corollaire de la proposition 1, un énoncé équivalent serait: tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace L^1 jouit de la propriété D.-P. Cela impliquerait que tout sous-espace vectoriel réflexif d'un espace L^1 est de dimension finie. Or, comme me l'a fait remarquer M. P. Malliavin, il n'en est rien, car il existe des sous-espaces vectoriels fermés H de dimension infinie de l'espace L^1 construit sur le segment $(0, 1)$, tels que toute $f \in H$ soit dans L^2; comme alors l'application identique de H dans L^2 est continue pour la topologie induite sur H par L^1 (grâce au théorème "du graphe fermé") et que d'autre part la topologie induite par L^2 sur H est plus fine que celle induite par L^1, il suit que ces deux topologies sont en fait identiques, donc que H est sous-espace vectoriel réflexif de dimension infinie de L^1.—Quant à la construction de H, il suffit, de la suite des $\phi_n(t) = e^{2i\pi nt}$, d'extraire une sous-suite (ϕ_{n_k}), avec $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, et de prendre pour H le sous-espace fermé de L^1 engendré par les ϕ_{n_k}. Alors toute $f \in H$ a une série de Fourier lacunaire, d'où suit en vertu d'un résultat classique (voir Zygmund, Trigonometrical Series, page 122) que $f \in L^2$.

§2. Critères de faible compacité dans les espaces L^1 et les espaces de mesures de Radon bornées, et une propriété réciproque de la propriété D.-P.

2.1 Critères de faible compacité dans $\mathfrak{M}^1(M)$. Soit M un espace localement compact, $C_0(M)$ l'espace des fonctions complexes continues sur M qui "s'annulent à l'infini", $\mathfrak{M}^1(M)$ son dual, c'est à dire l'espace des mesures de Radon bornées sur M. Si μ est une mesure positive quelconque sur M, et si à toute $\phi \in L^1(\mu)$ on fait correspondre la mesure $\phi\, d\mu$, on sait qu'on obtient un isomorphisme normé de $L^1(\mu)$ dans $\mathfrak{M}^1(M)$. Il suit que tout critère de compacité ou de faible compacité dans les espaces $\mathfrak{M}^1(M)$ donne un critère correspondant dans les espaces L^1 (dans la suite, par *topologie faible* dans $M^1(M)$ nous entendons la topologie faible définie par la dualité avec le dual de cet espace de Banach; nous appelerons *topologie vague* la topologie faible du dual de $C_0(M)$).[3]

Ce paragraphe est destiné essentiellment à l'exposé de critères de faible compacité dans $\mathfrak{M}^1(M)$. La proposition 3 du paragraphe précédent donne une condition nécéssaire remarquable pour qu'une partie A d'un espace L^1 soit faiblement relativement compacte. Nous allons transformer cette condition en une condition qui s'énonce directement pour une partie A d'un espace $\mathfrak{M}^1(M)$, puis nous montrerons que diverses formes en apparence plus faibles de cette condition suffisent déjà pour impliquer la faible compacité relative. La condition (4) du théorème qui suit (la plus faible de toutes en apparence) m'a été suggérée par la lecture de [**5**] (voir loc. cité, proposition 5).

Théorème 2. *Soit M un espace localement compact, A une partie bornée de l'espace $\mathfrak{M}^1(M)$ des mesures de Radon bornées sur M. Pour que A soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à l'une des conditions suivantes, toutes équivalentes:*

(1) *Pour toute suite uniformément bornée (f_i) de fonctions complexes sur M, mesurables pour toute $\mu \in A$, et qui convergent en chaque point vers une fonction $g(t)$, on a*

$$\lim_i \int f_i\, d\mu = \int g\, d\mu\ ,$$

[3]L'inverse ne semble pas vrai, puisque le critère de Dunford-Pettis (voir [**4**], théorème 4) s'énonce en faisant intervenir de façon essentielle la mesure μ qui sert de base. Néanmoins, en se servant de l'isomorphisme de $\mathfrak{M}^1(M)$ à un espace L^1 ([**11**]), et de la condition nécessaire du critère de Dunford-Pettis, il n'est pas difficile de voir que si A est partie faiblement compacte de $\mathfrak{M}^1(M)$, il existe une $\mu \in \mathfrak{M}^1(M)$ telle que $A \subset L^1(\mu)$, ce qui permettrait d'interprèter certains énoncés pour espaces L^1, en énoncés analogues pour espaces $\mathfrak{M}^1(M)$.

uniformément quand μ parcourt A. — Dans cet énoncé, on peut aussi se borner à supposer que pour tout compact $K \subset M$ et toute $\mu \in A$, f_i tend vers g en mesure sur K, relativement à la mesure μ.

(2) *Pour toute suite (f_i) faiblement convergente vers zéro dans C_0 (M),* (i.e. uniformément bornée, et tendant vers zéro en tout point), *on a*

$$\lim_i \langle f_i, \mu \rangle = 0$$

uniformément quand μ parcourt A.

(3) *Pour toute suite (O_i) d'ouverts disjoints deux à deux, on a*

$$\lim_i \mu(O_i) = 0$$

uniformément quand μ parcourt A.

(4) *On a l'ensemble des deux conditions:* (a) *Pour tout compact $K \subset M$ et tout $\epsilon > 0$, existe un voisinage ouvert U de K tel que $|\mu|(U \cap \complement K) \leqslant \epsilon$ pour toute $\mu \in A$.* (b) *Pour tout $\epsilon > 0$ existe un compact $K \subset M$ tel que $|\mu|(\complement K) \leqslant \epsilon$ pour toute $\mu \in A$.*

Démonstration. Démontrons d'abord la nécessité de la condition (1), en en prenant tout de suite la forme la plus forte. Si (1) n'était pas vérifié, il existerait un $\epsilon > 0$, une suite (g_n) extraite de la suite donnée et une suite (μ_n) extraite de A, telles que

$$\left| \int (g_n - g)\, d\mu_n \right| > \epsilon$$

pour tout n. Soit

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n ,$$

il est immédiat de vérifier que g_n tend vers g en mesure pour μ sur tout compact. Mais la suite (μ_n) peut être regardée comme une suite faiblement relativement compacte dans $L^1(\mu)$, de sorte que nous aurions contradiction avec la proposition 3 du §1.

Evidemment (1) implique (2). Prouvons que (2) implique (3). Si en effet (3) n'était pas vérifié, alors, en extrayant au besoin de (O_i) une suite partielle, il existerait $\epsilon > 0$ et une suite (μ_i) extraite de A tels que $|\mu_i(O_i)| > \epsilon$ pour tout i. Mais pour tout i existe alors une fonction continue positive f_i à support compact contenu dans O_i, et partout $\leqslant 1$, telle que $|\int f_i\, d\mu_i| > \epsilon$, ce qui contredit la condition (2).

(3) implique (4), car si par exemple la condition (4), a, n'était pas vérifiée, on construirait par récurrence une suite décroissante (V_n) de voisinages ouverts de K, une suite (μ_n) extraite de A et une suite (O_n) d'ouverts relativement compacts, tels que

$$\bar{O}_n \subset V_{n-1} \cap \complement V_n, \quad |\mu_n(O_n)| > \tfrac{1}{4}\epsilon$$

(ce qui contredit manifestement la condition (3)). Supposons la construction

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

faite jusqu'au rang n, on peut alors continuer d'un rang de la façon suivante. Il existe par hypothèse $\mu_{n+1} \in A$ telle que $|\mu_{n+1}(V_n \cap \complement K)| > \epsilon$, donc un compact $K_{n+1} \subset V_n \cap \complement K$ tel que $|\mu_{n+1}(K_{n+1})| > \frac{1}{4}\epsilon$, donc un ouvert relativement compact O_{n+1} tel que $K_{n+1} \subset O_{n+1} \subset \bar{O}_{n+1} \subset V_n \cap \complement K$ et $|\mu_{n+1}(O_{n+1})| > \frac{1}{4}\epsilon$. Il suffit maintenant de prendre un voisinage ouvert V_{n+1} de K contenu dans V_n et ne rencontrant pas le compact $\bar{O}_{n+1}$.—On établit de façon identique la condition (4), b.

Reste à prouver que (4) implique que A est faiblement relativement compact. En vertu du théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que toute suite (μ_i) extraite de A admet un point d'adhérence faible; mais on sait que la suite des μ_i est contenu dans un même espace $L^1(\mu)$, de sorte qu'on est ramené à prouver que les conditions correspondantes aux conditions (a), (b), ci-dessus *dans un espace* L^1, impliquent que A est faiblement relativement compact.[4] Mais ici, en vertu du critère classique de Dunford-Pettis, il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, existe un $\eta > 0$ tel que pour toute partie ouverte U de M de mesure $< \eta$, on ait

$$\int_U |f|\, d\mu \leqslant \epsilon, \qquad \text{pour } f \in A.$$

On peut d'ailleurs, grâce à la condition b, supposer que U est astreint à rester dans un compact fixe, de sorte que nous sommes ramenés au cas où M est compact. — Procédons alors par l'absurde; si A n'était pas faiblement relativement compact, il existerait une suite (U_n) de parties ouvertes de M, et une suite (f_n) extraite de A, telles que $\mu(U_n) \leqslant 2^{-n}$,

$$\int_{U_n} |f_n|\, d\mu > \epsilon.$$

Posons

$$V_n = \bigcup_{i \geqslant n} U_i$$

les V_n forment une suite décroissante d'ouverts dont les mesures tendent vers zéro, et on a

$$\int_{V_n} |f_n|\, d\mu > \epsilon.$$

Notons qu'en passant aux complémentaires, la condition (a) implique que pour tout ouvert V et tout $\alpha > 0$, existe un compact $K \subset V$ tel que

$$\int_{V \cap K} |f|\, d\mu \leqslant \alpha, \qquad \text{pour } f \in A.$$

Soit donc K_n un compact contenu dans V_n tel que

[4]Comme $L^1(\mu)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{M}^1(M)$, sa topologie faible est la topologie induite par la topologie faible de $\mathfrak{M}^1(M)$, et $L^1(\mu)$ est faiblement fermé. Par suite, une partie de $L^1(\mu)$ *y* est faiblement relativement compacte si et seulement si elle est faiblement relativement compacte dans $\mathfrak{M}^1(M)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

$$\int_{V_n \cap K_n} |f| \, d\mu \leqslant 2^{-n-1} \epsilon, \qquad \text{pour } f \in A.$$

Soit

$$K'_n = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} K_i$$

on a $K'_n \subset K_n \subset V_n$, et

$$\int_{K'_n} |f_n| \, d\mu \geqslant \int_{V_n} |f_n| \, d\mu - \int_{V_n \cap \complement K'_n} |f_n| \, d\mu.$$

Or

$$V_n \cap \complement K'_n = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (V_n \cap \complement K_i) \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (V_i \cap \complement K_i),$$

d'où

$$\int_{V_n \cap \complement K'_n} |f_n| \, d\mu \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} 2^{-i-1} \epsilon \leqslant \tfrac{1}{2}\epsilon,$$

donc

$$\int_{K'_n} |f_n| \, d\mu \geqslant \epsilon - \tfrac{1}{2}\epsilon = \tfrac{1}{2}\epsilon.$$

Mais les K'_n forment une suite décroissants de compacts, évidemment non vides, dont les mesures tendent vers zéro. Leur intersection K n'est pas vide, et on a $\mu(K) = 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert U de K tel que

$$\int_{U \cap \complement K} |f| \, d\mu < \tfrac{1}{2}\epsilon, \qquad \text{pour } f \in A,$$

soit, puisque K est négligeable,

$$\int_U |f| \, d\mu < \tfrac{1}{2}\epsilon.$$

Mais K étant l'intersection d'une suite décroissante de compacts K'_n, un des compacts K'_n est contenu dans U. On aurait alors, puisque

$$\int_{K'_n} |f_n| \, d\mu \geqslant \tfrac{1}{2}\epsilon \, ,$$

l'inégalité

$$\int_U |f_n| \, d\mu \geqslant \tfrac{1}{2}\epsilon \, ,$$

ce qui amène contradiction et par suite démontre le théorème.

Corollaire du théorème 2. *Soit $E = C_0(M)$, $E' = \mathfrak{M}^1(M)$, A une partie de E'. Pour que A soit relativement $\sigma(E', E'')$-compacte, il faut et il suffit que l'on ait la condition*

(2) bis. *A est relativement compact pour $\tau(E', E)$.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

En effet, on sait (corollaire du lemme 3 du §1) que cette condition est équivalente à la condition (2) du théorème 2.

Remarque. Le résultat essentiel de **[5]** (loc. cité, prop. 8)—et qui nous servira encore par la suite—affirme que, si M est compact métrisable, *une suite* (μ_i) *dans* $\mathfrak{M}^1(M)$ *converge faiblement si et seulement si pour tout ouvert* O *dans* M, *la suite des* $\mu_i(O)$ *est convergente.* A titre didactique, montrons comment ce résultat peut se déduire assez simplement du théorème 2, $\mathfrak{M}$ étant un espace localement compact quelconque (pas forcément métrisable). Il suffit manifestement de montrer que sous les conditions ci-dessus, la suite (μ_i) est faiblement relativement compacte. On montre assez simplement (loc. cité, prop. 9) que la suite reste bornée, il suffit donc de montrer que pour toute suite (O_j) d'ouverts deux à deux disjoints, on a

$$\lim_j \mu_i(O_j) = 0$$

uniformément en i. Soit l^1 l'espace des suites sommables de nombres complexes avec sa topolgie naturelle, et pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^1(M)$ soit $\tilde{\mu} \in l^1$ définie par $\tilde{\mu}(j) = \mu(O_j)$. On vérifie immédiatement que la suite $(\tilde{\mu}_i)$ est suite de Cauchy faible dans l^1 (car elle est bornée, et pour toute partie N_1 de l'ensemble N des entiers,

$$\sum_{j \in N_1} \tilde{\mu}_i(i) = \mu_i\Big(\bigcup_{j \in N_1} O_j\Big)$$

tend vers une limite), donc faiblement convergente, ce qui implique (d'après le critère de Dunford-Pettis par exemple) que

$$\lim_j \tilde{\mu}_i(j) = 0$$

uniformément en i, cqfd.

Le résultat de Dieudonné que nous venons de rappeler permet de prouver un intéressant complément au théorème 2. Pour l'énoncer, notons d'abord que si $\mathfrak{L}^\infty(M)$ désigne l'espace des fonctions bornées sur M qui sont mesurables pour toute mesure de Radon sur M, alors $\mathfrak{L}^\infty(M)$ muni de la norme uniforme s'identifie à un sous-espace du dual de $\mathfrak{M}^1(M)$, toute $f \in \mathfrak{L}^\infty(M)$ définissant la forme linéaire continue $\mu \to \int f\, d\mu$. Cela étant, on a le

Théorème 3. *Soit* M *un espace localement compact,* β_0 *l'espace des fonctions sur* M *engendré par les fonctions caractéristiques des parties fermées de* M. *Pour qu'une partie bornée* A *de* $\mathfrak{M}^1(M)$ *soit faiblement relativement compacte, il suffit* (*et il faut évidemment*) *qu'elle satisfasse à la condition suivante*

(5) *A est relativement compact pour la topologie* $\sigma(\mathfrak{M}^1, \beta_0)$

Démonstration. On se ramène d'abord au cas où M est compact de la façon suivante. Si M n'était pas compact, soit $\hat{M}$ l'espace compact obtenu en adjoignant à M son "point à l'infini" ω; on sait qu'alors $\mathfrak{M}^1(M)$ s'identifie à l'hyperplan fortement fermé de $\mathfrak{M}^1(\hat{M})$ formé des mesures de Radon sur $\hat{M}$ qui n'ont pas de masse au point ω. On est donc ramené à montrer que A est partie faiblement

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

relativement compacte de $\mathfrak{M}^1(\hat{M})$, or il est immédiat de vérifier que A satisfait encore en tant que partie de $\mathfrak{M}^1(\hat{M})$ à la condition du théorème 3.

Supposons donc M compact, et envisageons d'abord le cas où M est de plus métrique. — Comme A est borné, sur l'adhérence vague de A, la topologie $\sigma(\mathfrak{M}^1, \beta_0)$ coïncide avec la topologie $\sigma(\mathfrak{M}^1, \bar{\beta}_0)$, où $\bar{\beta}_0$ est l'adhérence forte de β_0 dans le dual de $\mathfrak{M}^1(M)$, ou, ce qui revient au même, son adhérence dans $\mathfrak{L}^\infty(M)$. Cette adhérence contient $C(M)$, comme il est bien connu, et facile à voir. D'après le théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que de toute suite extraite de A on peut extraire une suite faiblement convergente. Mais M étant métrique, donc $C(M)$ séparable, donc la boule unité de $\mathfrak{M}^1(M)$ vaguement métrisable, on peut de la suite donnée extraire une suite qui converge vaguement. D'après les remarques précédentes et parce que A est relativement compact pour $\sigma(\mathfrak{M}^1, \bar{\beta}_0)$, cette suite converge donc aussi au sens de $\sigma(\mathfrak{M}^1, \bar{\beta}_0)$ donc aussi au sens de la topologie faible de $\mathfrak{M}^1(M)$, en vertu du théorème de Dieudonné rappelé plus haut. — Le cas où M est un compact quelconque se ramène au cas métrique grace au

LEMME 5. *Soit M un espace compact, A un ensemble borné de mesures de Radon sur M. Pour que A soit partie faiblement relativement compacte de $\mathfrak{M}^1(M)$, il faut et il suffit que pour tout espace quotient séparé métrisable $\tilde{M}$ de M, l'image canonique de A dans $\mathfrak{M}^1(\tilde{M})$ soit une partie faiblement relativement compacte de cet espace.*

Démonstration. On peut évidemment se borner à établir la suffisance de la condition, et supposer A convexe, cerclé, vaguement fermé. Signalons alors le lemme facile et bien connu:

LEMME 6. *Si E est un espace localement convexe, A une partie équicontinue convexe, cerclée et faiblement fermée de son dual, il existe une application linéaire continue u de E dans espace de Banach F telle que la transposée u' applique biunivoquement la boule unité de F' sur A.*

Pour le voir, il suffit de considérer la semi-norme sur E définie par l'ensemble polaire A^o de A, et d'appeler F l'espace de Banach déduit de cette semi-norme de la façon usuelle (en faisant un quotient pour obtenir une vraie norme, et en complétant). L'application u naturelle de E dans F satisfait à la condition voulue.

Dans le cas actuel, pour démontrer que A est partie du dual E' de $E = C(M)$, compacte pour $\sigma(E', E'')$, il suffit de démontrer que l'application u définie dans le lemme précédent est faiblement compacte (lemme 1) donc, en vertu du théorème d'Eberlein, que pour toute suite (f_i) extraite de la boule de $C(M)$, la suite des $u(f_i)$ a une valeur d'adhérence faible dans F. Mais soit $\tilde{M}$ l'espace quotient de M par la relation d'équivalence "$f_i(s) = f_i(t)$ pour tout i". $\tilde{M}$ est manifestement séparé donc compact, et de plus métrique, car sa topologie est la topologie la moins fine de celles qui rendent continues les fonctions déduites des f_i par passage au quotient (topologie en effet moins fine, et encore séparée).

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

$C(\tilde{M})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $C(M)$, contenant les f_i. Tout revient à montrer que la restriction v de u à $C(\tilde{M})$ est faiblement compacte, c'est à dire (lemme 1) que l'image de la boule unité de F' par v' est partie du dual $H' = \mathfrak{M}^1(\tilde{M})$ de $H = C(\tilde{M})$ qui est relativement compacte pour $\sigma(H', H'')$. Or, on vérifie immédiatement que cette image n'est autre que l'image canonique de A dans $\mathfrak{M}^1(\tilde{M})$, ce qui établit le lemme 5.

Remarque. Le lemme 5 permet d'affaiblir encore certains criteres suffisants de relative faible compacité dans $\mathfrak{M}^1(M)$. Par exemple, si M est compact (pour simplifier), on peut dans l'énoncé du théorème 3 remplacer l'espace β_0 par l'espace engendré par les fonctions caracteristiques de parties fermées ayant une *suite* fondamentale de voisinage (ce ne sont autres que les images réciproques de parties fermées dans des quotients séparés métriques de M). La modification analogue vaudrait pour les énoncés (3) et (4) du théorème 2.

En dehors du critère de Dunford-Pettis (qui était d'ailleurs essentiel dans la démonstration du théorème 2) nous disposons donc d'au moins 5 autres critères remarquables de faible compacité relative dans $\mathfrak{M}^1(M)$. Sauf le critère (4) du théorème 2, qui nous a servi surtout d'intermédiaire dans la démonstration, *chacun* de ces critères permet des applications intéressantes et notre article consiste surtout dans l'exposé de ces conséquences. Le §1 exploitait essentiellement le fait que la faible relative compacité de A implique la condition (1) du théorème 2. La réciproque de ce fait implique une réciproque du théorème 1 relatif aux espaces $C(K)$. Aussi consacrerons-nous le reste de ce paragraphe à l'étude d'une propriété réciproque de la propriété D.-P. envisagée dans le paragraphe précédent.

2.2 Une propriété réciproque de la propriété D.-P.

PROPOSITION 8. *Soit E un espace localement convexe, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties convexes cerclées et bornées de E. Les conditions suivantes sont toutes équivalentes:*

(1) *Pour tout espace localement convexe séparé complet F, toute application linéaire continue de E dans F qui transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en parties relativement compactes de F, transforme parties bornées de E en parties relativement faiblement compactes de F;*

(2) *Même énoncé, mais F étant supposé un espace de Banach;*

(3) *Toute partie équicontinue A' de E' telle que les $A \in \mathfrak{S}$ soient précompacts pour la A'-convergence, est relativement $\sigma(E', E'')$-compacte;*

ou l'une des formes équivalentes, d'après le lemme 3, *à la condition* (3), *en particulier:*

(4) *Toute partie A' de E', équicontinue, et précompacte pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, est relativement $\sigma(E', E'')$-compacte.*

Démonstration. L'énoncé et la démonstration sont en tous points analogues à ceux de la proposition 1, dont celle-ci est une forme inversée. Il suffit par exemple de prouver (2) $\to$ (3), puis (4) $\to$ (1).

(2) $\to$ (3). On vérifie immédiatement qu'on peut supposer A' convexe, cerclé et faiblement fermé, donc (lemme 6) image de la boule d'un unité dual de Banach F par l'application transposée u' d'une application linéaire continue u de E dans F. Comme u est encore continue quand E est muni de la topologie de la A-convergence (ce qui signifie en effet précisément que u' transforme la boule unité de F' en une partie équicontinue de E'), il suit qu'elle transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en parties précompactes de F, donc par hypothèse elle transforme les parties bornées en parties faiblement relativement compactes de F, c'est à dire (lemme 1) u' transforme la boule unité de F' en une partie $\sigma(E', E'')$-compacte de E'.

(4) $\to$ (1). Pour montrer que u transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes, il suffit de montrer (lemme 1) que la transposée u' transforme les parties équicontinues de F' en parties relativement $\sigma(E', E'')$-compactes de E', or ces transformées sont équicontinues, et précompactes pour la $\mathfrak{S}$-convergence (lemme 2), la conclusion apparait donc, compte tenu de l'hypothès (4).

DÉFINITION 3. *On dit qu'un espace localement convexe E jouit de la propriété réciproque de la propriété* D.-P. (*en abrégé, que E jouit de la propriété* R. D.-P.) *si les conditions équivalentes* (1) *à* (4) *de la proposition* 8 *sont satisfaites,* $\mathfrak{S}$ *désignant l'ensemble des parties convexes cerclées et faiblement compactes de E.*

Cela signifie donc aussi que toute application linéaire continue de E dans un espace localement convexe complet qui transforme parties faiblement compactes convexes cerclées en parties précompactes, transforme les bornés en parties faiblement relativement compactes. Ou aussi (en vertu de la condition (4)) que les parties équicontinues $\tau(E', E)$-compactes de E' sont $\sigma(E', E'')$-compactes. La conjonction des deux hypothèses D.-P. et R. D.-P. signifie que la condition précédente pour qu'une application linéaire continue de E dans F transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes est à la fois nécessaire et suffisante; ou aussi, que parmi les parties équicontinues de E', relative compacité au sens de $\tau(E', E)$ ou au sens de $\sigma(E', E'')$ est la même chose.

THÉORÈME 4. *Tout espace $C(K)$ (K, espace compact) ou $C_0(M)$ (M, espace localement compact) jouit de la propriété* D.-P. *et* R. D.-P.

Ce n'est autre que le corollaire du théorème 2 du §2.

COROLLAIRE 1. *Soit M un espace normal, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de M, $C(M, \mathfrak{S})$ l'espace des fonctions continues sur M qui restent bornées sur les ensembles $A \in \mathfrak{S}$, muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. Alors $C(M, \mathfrak{S})$ jouit de la propriété* D.-P. *et* R. D.-P.

Pour la propriété D.-P. c'est la proposition 6. Pour la propriété R. D.-P., on s'aperçoit, en reprenant le raisonnement qui nous a permis de ramener la proposition 6 au théorème 1, que tout revient à montrer que si A est une partie fermée de M, $C^{\infty}(A)$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur A, et (f_i) une suite faiblement convergente dans $C^{\infty}(A)$, il existe une suite (g_i)

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

faiblement convergente dans $C(M, \mathfrak{S})$, telle que pour tout i, f_i soit la restriction de g_i à A. *A fortiori* suffit-il de prouver le lemme suivant, qui a son intérèt propre.

LEMME 7. *Soit M un espace normal, A une partie fermée de M, $C^\infty(M)$ et $C^\infty(A)$ les espaces de Banach des fonctions continues et bornées sur M (resp. A). Soit (f_i) une suite de Cauchy faible (resp. une suite faiblement convergente) dans $C^\infty(A)$. Alors il existe une suite de Cauchy faible (resp. une suite faiblement convergente) (g_i) dans $C^\infty(M)$, telle que pour tout i, f_i soit la restriction de g_i à A.*

Pour le voir, remarquons que l'application linéaire de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(A)$ obtenue par restriction à A, applique la boule unité de $C^\infty(M)$ *sur* celle de $C^\infty(A)$ (théorème de Urysohn) de sorte que $C^\infty(A)$ s'identifie à l'espace quotient de $C^\infty(M)$ par le noyau J de cette application, J étant donc l'espace des $f \in C^\infty(M)$ qui s'annulent sur A. Mais on sait que $C^\infty(M)$ s'identifie, en tant qu'algèbre normée complète, à l'espace $C(K)$ des fonctions continues sur le compactifié de Čech-Stone de M, et J s'identifie au sous-espace de $C(K)$ formé des $f \in C(K)$ qui s'annulent sur l'adhérence de A dans K. On est donc ramené au cas où M est un espace compact K. Prenons alors pour tout i un $h_i \in C(K)$ dont la restriction à A soit identique à f_i et considérons l'espace compact métrisable $\tilde{K}$, quotient de K par la relation d'équivalence "$f_i(s) = f_i(t)$ pour tout i." $C(\tilde{K})$ s'identifie alors à un sous-espace de $C(K)$ contenant les h_i, $J \cap C(\tilde{K})$ s'identifiant à l'espace des fonctions continues sur $\tilde{K}$ qui s'annulent sur l'image canonique $\tilde{A}$ de A. On est alors aussitôt ramené à démontrer le lemme 7 quand M est compact métrisable. D'ailleurs, dans le cas où (f_i) est une suite faiblement convergente dans $C(A)$, on peut supposer que la limite est nulle. Notons maintenant que d'après le théorème de Lebesgue, une suite de fonctions continues sur un compact est suite de Cauchy faible (resp. converge faiblement vers zéro) si et seulement si elle est uniformément bornée et converge en chaque point vers une limite (resp. vers une limite nulle). Soit alors (U_i) une *suite* fondamentale de voisinages de A (K est métrisable !) et pour tout i, soit g_i une fonction continue sur K, égale à f_i sur A, à zéro dans $\complement U_i$, et telle que $\|g_i\| = \|f_i\|$ (l'existence en est assurée par le théorème d'Urysohn). Il est alors immédiat de vérifier que la suite (g_i) satisfait aux conditions voulues.

Remarque. La réciproque du théorème 1 n'est pas valable pour les espaces L^1, puisque l'application identique de l'espace l^1 des suites sommables sur lui-même transforme parties faiblement compactes en parties compactes, mais n'est pas faiblement compacte. Comme tout espace L^1 de dimension infini admet un quotient isomorphe à l^1 (ce qui est bien connu, et facile à vérifier), il suit facilement qu'un tel espace ne jouit jamais de la propriété R.D.-P. D'où aussitôt le

COROLLAIRE 2. *Un espace L^1 de dimension infinie ne peut être isomorphe à un quotient*[5] *d'espace $C(K)$*

[5]Signalons pourtant une démonstration directe très facile du corollaire 2. En vertu de la dualité entre les types L^1 et $C(K)$ notée plus haut, il est équivalent à: un espace $C(K)$ de

car on a la

PROPOSITION 9. *Un espace quotient d'un espace de Banach qui jouit de la propriété* R.D.-P., *un facteur direct d'un espace qui jouit de la propriété* R.D.-P., *jouit de la même propriété.—Le produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces localement convexes qui jouissent de la propriété* R.D.-P. *jouit de la même propriété.*

La démonstration est triviale.

COROLLAIRE. *Si O est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, l'espace $\mathfrak{E}^{(m)}(O)$ des fonctions m fois continûment différentiables sur O, muni de sa topologie usuelle, jouit de la propriété* D.-P. *et* R.D.-P. *Il en est de même de l'espace $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$ analogue construit sur une partie compacte K de $\mathbf{R}^n$.*

Il suffit d'appliquer le lemme 4, le théorème 4 et son corollaire 1, et la proposition 9.

2.3 Application de la propriété R.D.-P. Notons d'abord le résultat suivant, qui généralise un théorème de Dunford [**6**]

THÉORÈME 5. *Soit M un espace localement compact muni d'une mesure μ, E un espace localement convexe séparé, Φ une application faiblement sommable de M dans E, telle que $u(f) = \int \Phi f d\mu$ soit élément de E quelle que soit $f \in L^\infty$. Soit $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des parties faiblement bornées A' de E' telles que de toute suite extraite de A' on puisse extraire une suite de Cauchy faible. Soit $E(\mathfrak{S}')$ l'espace E muni de la topologie de la $\mathfrak{S}'$-convergence. Alors l'application $f \to u(f)$ de $L^\infty(\mu)$ dans $E(\mathfrak{S}')$ est application précompacte.*

COROLLAIRE. *M et Φ étant comme ci-dessus, l'application $f \to u(f)$ de L^∞ dans E est précompactes dans chacun des cas suivants:*

(a) *E est séparable* (i.e., admet une suite partout dense).

(b) *E est du type $(\mathfrak{F})$, Φ est fortement mesurable.*

(c) *E est un espace de Banach réflexif.*

(d) *E est le dual d'un espace F du type $(\mathfrak{F})$, muni de la topologie $\tau(F', F)$.*

Démonstration. Soit u' l'application transposée de u. Par définition de l'intégrale faible, pour $x' \in E'$, $u'(x')$ est la classe dans L^1 de la fonction

$$u'(x')\ (t) = \langle \Phi(t), x' \rangle .$$

La conclusion signifie aussi (lemme 2) que pour toute $A' \in \mathfrak{S}'$, $u'(A')$ est partie précompacte de L^1, donc que pour toute suite (x'_i) extraite de A', on peut extraire de la suite $(u(x'_i))$ une suite fortement convergente. Mais par hypothèse, on peut extraire de la suite (x'_i) une suite de Cauchy faible (y'_i); je dis que la

dimension infinie n'est pas isomorphe à un sous-espace vectoriel d'un espace L^1. Mais cela résulte du fait que toute suite de Cauchy faible dans un espace L^1 converge faiblement, tandis qu'il est facile de s'assurer que cette propriété est en défaut dans les espaces $C(K)$ de dimension infinie. — Ce résultat resoud une question de Banach [**1**, pp. 244-245]. Les propriétés 8 et 9 de Banach sont en défaut dans $(\mathfrak{M})$, (m), (C), (C^p).

suite des $u(y'_i)$ est fortement convergente. En effet, u' étant évidemment application faiblement continue de E' dans L^1 (car $\int \Phi f\, d\mu \in E$ pour $f \in L^\infty$), la suite des $u(y'_i)$ est une suite de Cauchy faible dans L^1, donc faiblement convergente [**4,** corollaire du théorème 3], et elle admet d'autre part une suite de représentants

$$u'(y'_i)\ (t) = \langle \Phi(t), y'_i \rangle$$

qui tend en chaque point $t \in M$ vers une limite, d'où résulte (loc. cité, corollaire du théorème 2) que la suite des $u(y'_i)$ converge bien fortement.

Le corollaire en résulte; il suffit en effet de vérifier que de toute suite équicontinue de E' on peut extraire une suite faiblement convergente. C'est vrai sous la condition (a), car les parties équicontinues de E' sont alors faiblement métrisables; sous la condition (b) quand M est "dénombrable à l'infini", parce que l'on peut se ramener à (a) ($\Phi(t)$ prenant ses valeurs presque partout dans un sous-espace séparable de E); sous la condition (c), grâce au théorème de Šmulian appliqué dans le dual; enfin sous la condition (d), grâce au théorème de Šmulian appliqué dans F. Enfin, dans (b), il n'est pas difficile de se libérer de la condition que M soit réunion dénombrable de compacts, car on est ramené à montrer que la restriction de u à $C_0(M)$ est une application pré-compacte (en notant que la boule de $C_0(M)$ est faiblement dense dans celle de $L^\infty(\mu)$), donc que pour toute suite (f_i) extraite de la boule unité de $C_0(M)$, la suite des $u(f_i)$ a une valeur d'adhérence faible; comme chaque f_i est nul dans le complémentaire d'une réunion dénombrable de compacts, on est aussitôt ramené au cas où M est lui-même réunion dénombrable de compacts.

Je ne sais pas s'il est vrai, Φ étant comme dans le théorème 5, que $f \to u(f)$ soit *toujours* une application précompacte de L^∞ dans E. — Dans ce problème, on peut manifestement se ramener au cas où E est un espace de Banach.

PROPOSITION 10. *Soit M un espace localement compact, muni d'une mesure μ, E un espace ($\mathfrak{F}$) jouissant de la propriété* R. D.-P., Φ *une application faiblement sommable de M dans E'. Alors l'application $f \to \int \Phi f\, d\mu$ applique la boule unité de $L^\infty(\mu)$ dans une partie de E' qui est relativement compacte pour $\sigma(E', E'')$ et $\tau(E', E)$.*

En effet, l'image de la boule unité de $L^\infty(\mu)$ est relativement compacte pour $\tau(E', E)$ d'après la partie (d) du corollaire du théorème 5, donc aussi $\sigma(E', E'')$-compacte en vertu de l'hypothèse sur E.

COROLLAIRE 1. *Sous les conditions de la proposition* 10, *si $\mathfrak{F}$ est un filtre borné sur L^∞ qui converge en mesure sur tout compact vers une $g \in L^\infty$, alors $\int \Phi f\, d\mu$ tend fortement suivant $\mathfrak{F}$ vers $\int \Phi g\, d\mu$.*

En effet, l'application v de E dans L^1 définie par

$$v(x)\ (t) = \langle x, \Phi(t) \rangle ,$$

application qui a pour transposée l'application

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

$$f \to u(f) = \int \Phi f \, d\mu ,$$

transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes en vertu de la proposition 10 et du lemme 1. Donc (lemme 1) sa bitransposée $v'' = u'$ (application de E'' dans $(L^1)''$ *a priori*) applique E'' dans L^1, de sorte que nous sommes dans les conditions d'application du corollaire 1 de la proposition 3.

Le cas particulier le plus intéressant de ces résultats est énoncé dans le

COROLLAIRE 2. *Soit M un espace localement compact muni d'une mesure μ, K un espace compact, $t \to \nu_t$ une application vaguement sommable de M dans l'espace $\mathfrak{M}^1(K)$ des mesures de Radon sur K. Alors les "mesures composées"*

$$\nu_f = \int f(t) \, \nu_t \, d\mu(t) \; ;$$

où f parcourt la boule unité de $L^\infty(\mu)$, admettent une base commune ν, et forment une partie faiblement relativement compacte de l'espace $L^1(\nu)$. Si $\mathfrak{F}$ est un filtre borné dans $L^\infty(\mu)$ qui converge vers $g \in L^\infty(\mu)$ en mesure sur tout compact, alors

$$\int f(t) \, \nu_t \, d\mu(t)$$

converge fortement suivant $\mathfrak{F}$ vers

$$\int g(t) \, \nu_t \, d\mu(t).$$

Il suffit de tenir compte du théorème 5 et de la note du bas de la page 146.

En prenant en particulier pour M un espace discret, avec la masse $+1$ en chaque point, on obtient le

COROLLAIRE 3. *Soit I un ensemble d'indices, E un espace $(\mathfrak{F})$ qui jouit de la propriété* R. D.-P. *(par exemple un espace $C(K)$), $(x'_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E' telle que pour tout $x \in E$, la famille des $\langle x, x'_i \rangle$ soit sommable. Alors la famille des (x'_i) est fortement sommable* (ce qui implique en particulier, si par exemple E est un espace de Banach, que l'ensemble des $i \in I$ tels que $x'_i \neq 0$ est dénombrable).

§ 3. DEUXIÈME CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS LINÉAIRES FAIBLEMENT COMPACTES D'ESPACES $C(K)$, ET APPLICATIONS

3.1 La "propriété de Dieudonné". Tout critère de faible compacité relative dans les espaces $\mathfrak{M}^1(K)$ donne par transposition un critère correspondant pour décider qu'une application linéaire d'un espace $C(K)$ est faiblement compacte. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les divers critères simples, autres que le théorème 4, qu'on peut ainsi tirer du théorème 2 du §2. Le présent paragraphe sera consacré à l'exposé des conséquences du théorème 3 (bien que les résultats les plus essentiels de ce paragraphe pourraient déjà se déduire d'une forme un peu moins fine et bien plus élémentaire du théorème 6 qui va suivre). Comme d'habitude, nous commençons par une sorte d'axiomatisation des propriétés que nous avons en vue.

PROPOSITION 11. *Soit E un espace localement convexe, Φ un ensemble de filtres dans E qui convergent faiblement dans E'' (resp. $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E), H le sous-espace vectoriel de E'' engendré par E et les limites des filtres $\mathfrak{F} \in \Phi$ (resp. engendré par E et les adhérences faibles des parties $A \in \mathfrak{S}$). Les conditions suivantes sont toutes équivalentes:*

(1) *Pour tout espace localement convexe séparé complet F, toute application linéaire continue de E dans F qui transforme les filtres $\mathfrak{F} \in \Phi$ en filtres qui convergent faiblement dans F (resp. qui transforme les parties $A \in \mathfrak{S}$ en parties relativement faiblement compactes de F), transforme les parties bornées de E en parties faiblement relativement compactes de F;*

(1) bis. *Pour tout espace localement convexe séparé complet F, et toute application linéaire continue u de E dans F telle que sa bitransposée u'' applique H dans F, u'' applique aussi E'' dans F (i.e., u transforme parties bornées de E en parties faiblement relativement compactes de F —voir lemme* 1);

(2) *Comme* (1), *mais F étant astreint à être un espace de Banach;*

(2) bis. *Comme* (1) bis, *mais F étant astreint à être un espace de Banach;*

(3) *Toute partie équicontinue convexe cerclée et $\sigma(E', H)$-compacte de E' est aussi $\sigma(E', E'')$-compacte.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'énoncé relatif à l'ensemble Φ de filtres, celui relatif à la donnée de $\mathfrak{S}$ en est un cas particulier comme on voit en considérant l'ensemble Φ des filtres de Cauchy faibles sur les $A \in \mathfrak{S}$. On a évidemment (1) $\rightarrow$ (2), et (1) bis et (2) bis sont respectivement équivalents à (1) et (2), comme il résulte aussitôt du fait que u'' s'obtient en prolongeant u par continuité faible. On est donc ramené à montrer (2) bis $\rightarrow$ (3) et (3) $\rightarrow$ (1).

(2) bis $\rightarrow$ (3). Soit en effet A' une partie équicontinue convexe cerclée et $\sigma(E', H)$-compacte de E', en vertu du lemme 6 du §2, c'est l'image de la boule unité d'un dual d'espace de Banach F, par l'application transposée u' d'une application linéaire continue u de E dans F. Pour montrer que A' est $\sigma(E', E'')$-compact, il suffit donc (lemme 1) de montrer que la bitransposée u'' applique E'' dans F, et par hypothèse il suffit même de montrer que u'' applique H dans F. Cela se démontre comme dans le lemme 1: E est dense dans H pour la topologie $\tau(H, E')$ (car toute forme linéaire sur H continue pour cette topologie —i.e. provenant d'un $x' \in E'$— et qui s'annule sur E, est nulle), or la restriction de u'' à H est continue pour la topologie $\tau(H, E')$ (et la topologie naturelle sur F''), d'après l'hypothèse sur A'; comme u'' applique E dans F et que F est complet, la conclusion apparait.

(3) $\rightarrow$ (1). Soit u une application linéaire continue de E dans F telle que $u''(H) \subset F$, nous voulons montrer, moyennant (3), que u'' transforme parties bornées de E en parties faiblement relativement compactes de F, i.e. (lemme 1) que u' transforme parties équicontinues convexes cerclées et faiblement compactes B' de F' en parties $\sigma(E', E'')$-compactes de E'. Mais $u''(H) \subset F$ signifie

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

aussi que u' est continue de F' faible dans E' muni de $\sigma(E', H)$, de sorte que les $u'(B')$ sont $\sigma(E', H)$-compactes, donc $\sigma(E', E'')$-compactes en vertu de (3).

DÉFINITION 4. *Soit E un espace localement convexe. On appelle sous-espace de Baire de classe 1 de E'', le sous-espace de E'' formé des limites faibles dans E'' des suites de Cauchy faibles de E. On dit que E jouit de la propriété de Dieudonné (en abrégé, de la propriété D) s'il satisfait aux conditions équivalentes de la proposition 11, Φ étant l'ensemble des filtres élémentaires associé aux suites de Cauchy faibles dans E, donc H le sous-espace de Baire de classe 1 de E''.*

Cela signifie donc que toute application linéaire continue de E dans un espace localement convexe séparé complet F, qui transforme suites de Cauchy faibles de E en suites faiblement convergentes de F, transforme les parties bornées de E en parties faiblement relativement compactes de F.

On pourrait aussi, pour tout nombre ordinal α de seconde classe, introduire de façon évidente le "sous-espace de Baire de classe α" de E'', et la "propriété D de classe α" correspondante; et aussi le "sous-espace de Baire" de E'', réunion des sous-spaces de Baire de toutes les classes, et une "propriété D au sens large" correspondante. Cette dernière propriété serait suffisante pour la plupart des applications que nous avons en vue. Mais comme dans les espaces que nous allons considérer, nous avons même la propriété plus stricte de la définition 4, ce sera la seule dont nous parlerons.

Exemples. (a) Tout espace semi-réflexif jouit trivialement de la propriété D.

(b) Si E est complet et si dans E toute suite de Cauchy faible converge faiblement, alors E ne jouit de la propriété D que s'il est semi-réflexif, car l'application identique de E sur lui-même doit transformer parties bornées en parties faiblement relativement compactes. [**3,** p. 79]. — En particulier, un sous-espace vectoriel fermé d'un espace du type L^1 ne jouit de la propriété D que s'il est réflexif.

(c) Si les parties bornées de E sont faiblement métrisables (ce qui signifie, lorsque E est un espace de Banach, que son dual fort est séparable), E jouit de la propriété D, car le sous-espace de Baire de classe 1 de E'' est alors identique à E''.

(d) L'exemple le plus important fera l'objet du théorème 6.

PROPOSITION 12. *Un espace quotient d'un espace de Banach qui jouit de la propriété D, tout facteur direct d'un espace qui jouit de la propriété D, jouit de la même propriété. Le produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces qui jouissant chacun de la propriété D, jouit de la propriété D.*

Soit E un espace localement convexe qui jouit de la propriété D, F un espace localement convexe séparé complet tel que toute suite de Cauchy faible dans F converge faiblement dans F. Alors toute application linéaire continue de E dans F transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes de F.— Il en est en particulier ainsi chaque fois que F est un espace du type L^1 [**4,** cor. du théorème 3].

La démonstration est triviale. La deuxième partie de la proposition constitue l'application la plus importante de la propriété D (voir théorèmes 7, 7 bis, 8).

3.2 Cas des espaces $C(K)$. Soit M un espace localement compact, $\mathfrak{L}^\infty(M)$ l'espace des fonctions complexes bornées sur M qui sont mesurables pour toute mesure de Radon sur M. Comme nous l'avons déjà signalé, $\mathfrak{L}^\infty(M)$ s'identifie à un sous-espace normé du bidual de l'espace $E = C_0(M)$ des fonctions complexes continues sur M nulles à l'infini. Alors le sous-espace de Baire de classe 1 de E'' s'identifie à l'espace des fonctions de Baire bornées de classe 1 au sens classique (limites des suites convergentes uniformément bornées de fonctions continues à support compact), car d'après le théorème de Lebèsgue, la suite (f_i) extraite de $\mathfrak{L}^\infty(M)$ est une suite de Cauchy faible si (et seulement si) elle est uniformément bornée, et converge vers une limite en chaque point $t \in M$.

Un des résultats les plus importants de ce travail est le

THÉORÈME 6. *Soit K un espace compact. Alors l'espace $C(K)$ jouit de la propriété D. De facon plus précise, si u est une application linéaire continue de $C(K)$ dans un espace localement convexe séparé complet F, les conditions suivantes sont toutes équivalentes:*

(1) *u est application faiblement compacte,*

(2) *Pour tout partie fermée A de K — soit ϕ_A sa fonction caractéristique, identifiée à un élément du bidual de $C(K)$ — on a $u''(\phi_A) \in F$. Dans cet énoncé, on peut aussi supposer que A est astreint à admettre un système fondamental dénombrable de voisinages.*

(3) *u transforme toute suite croissante de fonctions continues positives majorées par 1 en une suite faiblement convergente dans F.*

Démonstration. (1) implique évidemment (3), car une suite croissante de fonctions continues positives majorées par 1 est uniformément bornée et converge en chaque point, donc est une suite de Cauchy faible dans $C(K)$. Par ailleurs, la forme la plus faible de (2) est manifestement équivalente à l'énoncé analogue qu'on obtient en supposant que A est un ouvert réunion d'une suite de compacts. Mais il est facile de vérifier, grâce au théorème d'Urysohn, qu'alors ϕ_A est limite d'une suite croissante de fonctions continues positives majorées par 1, d'où suit que (3) implique (2). Nous sommes donc ramenés à montrer que les conditions de la proposition 11 sont vérifiées quand H est le sous-espace de E'' engendré par E et les fonctions caractéristiques des parties fermées de K ayant une *suite* fondamentale de voisinages. Mais en vertu de la condition (3) de la proposition 11, ce n'est autre que la forme renforcée du théorème 3 du §2, dans la remarque qui suit ce théorème.

Remarque 1. Notons à titre didactique qu'une démonstration bien plus élémentaire permet de démontrer la forme un peu moins fine du théorème 6: Si u'' applique l'espace des fonctions de Baire bornées de classe 2 *dans* F, alors u est application faiblement compacte (i.e., $C(K)$ possède la "propriété D de classe 2"). Grâce au lemme 5, on se ramène d'abord au cas où K est métrique, donc $C(K)$ séparable, et on note que les conditions de la proposition 11 sont équivalentes, quand E est séparable, à la condition:

(4) *Toute suite équicontinue dans E' qui converge vers zéro au sens de la topologie $\sigma(E', H)$, converge vers zéro au sens de $\sigma(E', E'')$.* — Mais dans le cas actuel, toute suite dans $\mathfrak{M}^1(K)$ est contenue dans un espace $L^1(\mu)$. On se sert alors du fait que le dual de $L^1(\mu)$ est $L^\infty(\mu)$, et que toute $f \in L^\infty(\mu)$ a une fonction-représentant qui est une fonction de Baire de classe 2.

Remarque 2. Le lecteur vérifiera sans difficulté à l'aide des techniques courantes dans cet article, que l'énoncé du théorème 6 est textuellement valable pour les espaces $C_0(M)$, où M est un espace localement compact. De même, le raisonnement qui a permis de déduire la proposition 6 du théorème 1, permet aussi de montrer que, si M est un espace localement compact, alors l'espace $C(M)$ des fonctions complexes continues sur M, muni de la topologie de la convergence compacte, jouit de la propriété D, et satisfait aussi à un énoncé analogue au théorème 6 (on utilise le lemme 7). Nous énoncerons donc, compte tenu de la proposition 12:

COROLLAIRE 1 DU THÉORÈME 6. *Tout produit topologique d'espaces vectoriels du type $C(M)$, tout espace quotient d'un espace du type $C(K)$ ou du produit topologique d'un nombre fini d'espaces du type $C(K)$, tout espace facteur direct d'un produit topologique d'espaces du type $C(M)$—jouit de la propriété D. En particulier, les espaces $\mathfrak{E}^{(m)}(O)$ et $\mathfrak{E}^{(m)}(K)$ de L. Schwartz* (voir proposition 7 et lemme 4) *ont la propriété D.*

COROLLAIRE 2. *Un espace de Banach qui est à la fois isomorphe à un espace quotient d'un espace $C(K)$ et à sous-espace d'un espace L^1 est forcément réflexif.*

Car nous avons déjà remarqué qu'un sous-espace vectoriel fermé d'un espace L^1 ne jouit de la propriété D que s'il est réflexif.—Ce corollaire précise de beaucoup le corollaire 2 analogue du théorème 4.

3.3 Application aux formes bilinéaires sur les produits d'espaces du type $C(K)$. La deuxième partie de la proposition 12 donne l'application la plus importante du théorème 6 et de ses corollaires. En particulier, on a le résultat suivant, qui mérite mention explicite.

THÉORÈME 7. *Toute application linéaire continue d'un espace $C(K)$ dans un espace L^1 est faiblement compacte, et transforme parties faiblement compactes ou parties bornées faiblement métrisables de $C(K)$ en parties fortement relativement compactes, donc les suites de Cauchy faibles en suites fortement convergentes.*

(La deuxième partie du théorème résulte du théorème 1, et de la remarque qui suit la proposition 1 bis.)

Rappelons maintenant que le dual d'un espace $C(K)$, donc l'espace $\mathfrak{M}^1(K)$ des mesures de Radon sur K, est isomorphe à un espace L^1 (voir remarques suivant le corollaire du théorème 1), d'autre part il est bien connu que pour deux espaces de Banach E et F donnés, les formes bilinéaires continues sur $E \times F$ correspondent biunivoquement aux applications linéaires continues de E dans F'. Posons maintenant la

DÉFINTION 5. *Une forme bilinéaire continue sur le produit de deux espaces de Banach E et F est dite compacte (resp. faiblement compacte), si l'application linéaire correspondante de E dans F' fort est compacte (resp. faiblement compacte).*

On vérifie d'ailleurs aussitôt qu'il revient au même de dire que l'application linéaire *de F dans E'* fort qui correspond à la forme bilinéaire est compacte (resp. faiblement compacte) car chacune des deux applications linéaires est la restriction (à E resp. à F) de la transposée de l'autre. Cela étant, on a le

THÉORÈME 7 BIS. *Soient E et F deux espaces de Banach isomorphes respectivement à des quotients d'espaces du type $C(K)$. Alors*

(a) *Toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ est faiblement compacte.*

(b) *Soit G un espace localement convexe, u une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. Si on suppose qué E est même isomorphe à un espace du type $C(K)$, alors, A désignant une partie faiblement compacte ou bornée et faiblement métrisable de E, et V la boule unité de F, u est fonction uniformément continue sur $A \times V$, muni de la structure uniforme produit des structures uniformes faibles, dans G faible.*

Le première partie du théorème résulte des remarques qui précédaient et proposition 12. Pour la deuxième partie, il faut vérifier que pour toute forme linéaire continue z' sur G, la fonction $\langle u(x, y), z' \rangle$ est uniformément continue sur $A \times V$, ce qui nous ramène au cas où G est le corps des scalaires. Mais alors, on vérifie trivialement que cet énoncé est équivalent à l'énoncé du théorème 7.

Le théorème 7 redonnerait par une autre voie le corollaire 2 de la proposition 10 du §2, en utilisant le fait que $L^\infty(\mu)$ est un espace du type $C(K)$ (Gelfand-Stone) et $\mathfrak{M}^1(K)$ un espace du type L^1 (Kakutani). Nous y reviendrons au No. 5 de ce paragraphe.

3.4 Application à une classe remarquable d'applications linéaires.

Définition 6. *Soient E et F deux espaces localement convexes. Une forme bilinéaire u sur $E \times F$ est dite "intégrale", si on peut trouver une partie équicontinue faiblement fermée A' (resp. B') de E' (resp. F') et une mesure de Radon μ sur le produit topologique $A' \times B'$ des compacts faibles A' et B', de telle façon que l'on ait, pour $x \in E$ et $y \in F$*

$$u(x, y) = \int_{A' \times B'} \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle \, d\mu(x', y'). \tag{3.41}$$

G étant un autre espace localement convexe, une application linéaire v de E dans G est dite intégrale si la forme bilinéaire $\langle vx, y' \rangle$ sur $E \times$ (G' fort) est intégrale, c'est à dire s'il existe une partie équicontinue faiblement fermée A' de E' et une partie bornée B dans G (dont nous désignons l'adhérence faible dans G'' par $\bar{B}$)

et enfin une mesure μ sur l'espace produit $A' \times \bar{B}$ des espaces compacts faibles A' et $\bar{B}$, tels que l'on ait, pour $x \in E$, $y' \in G$:

3.42 $$\langle v(x), y' \rangle = \int_{A' \times \bar{B}} \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle \, d\mu(x', y) \cdot$$

La relation (3.41) s'écrit sous forme abrégée

$$u = \int_{A' \times B'} x' \otimes y' \, d\mu(x', y')$$

où pour $x' \in E'$ et $y' \in F'$, $x' \otimes y'$ désigne la forme bilinéaire élémentaire $(x, y) \to \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle$ sur $E \times F$, le signe $\int$ désignant une intégrale faible dans l'espace de toutes les formes bilinéaires sur $E \times F$, mis en dualité avec l'espace $E \otimes F$ (voir [**2**]).

On peut supposer, pour étudier une forme bilinéaire intégrale ou une application intégrale, que l'on ait avec les notations précédentes: $||\mu|| \leqslant 1$, A' et B' (resp. A' et B) sont convexes cerclés. La formule de la moyenne donne alors aussitôt que $x \in (A')^\circ$, $y \in (B')^\circ$ implique $|u(x, y)| \leqslant 1$, par suite, u est application bilinéaire continue sur $E \times F$. Cela signifie aussi que l'application linéaire v de E dans F' définie par $\langle y, vx \rangle = u(x, y)$ applique le voisinage $(A')^\circ$ de l'origine dans E dans la partie équicontinue B' de F', *a fortiori* u est continue de E dans F' fort. Cela implique enfin qu'une application linéaire intégrale de E dans G, donné par la formule (3.42), applique le voisinage $(A')^\circ$ de O dans E dans la partie bornée B de G.

Les application linéaires intégrales interviennent assez souvent en pratique. D'ailleurs, elles admettent une interprétation fonctionnelle très simple, que je me borne à signaler ici sans démonstration: Les formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$ s'identifient aux formes linéaires continues sur l'espace $E \otimes F$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues.[6] La propriété que nous avons en vue ici est donnée par le

THÉORÈME 8. *Une application linéaire intégrale v d'un espace localement convexe E dans un espace localement convexe séparé complet G est faiblement compacte, et transforme parties faiblement compactes ou parties bornées et faiblement métrisables en parties relativement compactes, suites de Cauchy faibles en suites fortement convergentes. Par suite, une application linéaire de E dans G qui s'obtient en composant une application linéaire intégrale de E dans un espace localement convexe séparé complet F et une application linéaire intégrale de F dans G, est compacte.*

Démonstration. Munissons comme d'habitude le bidual G'' de G de la topologie T de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de G': topologie qui induit sur G sa topologie propre. Posons $F = G'$ fort. Je dis que v

[6] *Note ajoutée pendant la correction des épreuves.* La théorie des applications linéaires intégrales est exposée systématiquement dans mon travail *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (à paraître dans les Memoirs of the American Mathematical Society), Chap. 1, §4, no. 3. J'y obtiens des résultats plus précis que le théorème 8 et son corollaire.

transforme $(A')^\circ$ en une partie faiblement relativement compacte de G. Il suffit de montrer que c'est une partie de F' qui est relativement compacte pour la topologie $\sigma(F', F'')$, car *a fortiori* le sera-t-elle pour la topologie faible qui correspond à la topologie T sur F', or elle est contenue dans le sous-espace G de F' qui est fermé pour T (puisque complet). De même, pour montrer que v transforme parties faiblement compactes et parties bornées faiblement métrisables de E en parties relativement compactes de G, il suffit de montrer que ces dernières sont compactes dans F' fort. (L'énoncé relatif aux suites de Cauchy faibles en sera un corollaire immédiat.) Nous sommes par suite ramenés à la situation de la première partie de la définition 6. Nous supposerons alors A' et B' convexes cerclés. Soit E_1 l'espace de Banach obtenu en séparant et complétant E pour la semi-norme définie par le voisinage $(A')^\circ = U$ de l'origine dans E, et F_1 l'espace de Banach analogue déduit de F à l'aide du voisinage $(B')^\circ = V$ de l'origine. Nous avons déjà remarqué (lemme 6) que les boules unité des duals respectifs de E_1 et F_1 s'identifient respectivement, avec leur topologie faible, à A' faible et B' faible, par suite la mesure μ définit aussi une forme bilinéaire intégrale $\tilde{u}$ sur $E_1 \times F_1$, d'où une application linéaire intégrale $\tilde{v}$ de E_1 dans F_1'. Cela ramène le théorème envisagé au cas où E et F sont des espaces de Banach, car il suivra que v applique U dans une partie de $\mathbf{C}.B'$ (espace engendré par B') qui est faiblement relativement compacte dans l'espace $\mathbf{C}.B'$ muni de la topologie définie par la boule B', donc *a fortiori* relativement compact dans F' pour $\sigma(F', F'')$, et remarques analogues pour les autres parties de l'énoncé du théorème.

Supposons donc que E et F sont des espaces de Banach, A' et B' les boules unité faibles de leur duals respectifs. Alors E et F s'identifient respectivement à des sous-espaces normés des espaces $C(A')$ et $C(B')$ et la forme bilinéaire u donnée par 3.41 se prolonge de façon naturelle en une forme bilinéaire continue $\tilde{u}$ sur $C(A') \times C(B')$, donnée par

$$\tilde{u}(f, g) = \int_{A' \times B'} f(x')g(y')\, d\mu(x', y').$$

L'application linéaire v de E dans F' se déduit de l'application linéaire de $C(A')$ dans le dual $\mathfrak{M}^1(B')$ de $C(B')$ déduite de la forme bilinéaire $\tilde{u}$, en prenant la restriction de $\tilde{v}$ à E, et en composant avec l'application naturelle de $\mathfrak{M}^1(B')$ sur F'. L'application du théorème 7 donne alors les diverses propriétés que nous voulions établir.

COROLLAIRE 1. *Une application linéaire intégrale d'un espace de Banach E dans un autre F est compacte lorsque l'un des deux espaces est réflexif.*

Cela résulte aussitôt du théorème 8 lorsque le premier espace est réflexif, dans le cas contraire il suffit de considérer la transposée.

COROLLAIRE 2. *Si u est forme bilinéaire intégrale sur $E \times F$, sa restriction au produits de deux parties de E et F qui sont soit faiblement compactes, soit faiblement métrisables et bornées, est continue pour le produit des topologies faibles.*

Cela résulte du théorème 8, comme le théorème 7 bis du théorème 7. Bien entendu, on pourrait même énoncer un résultat plus fort, analogue à l'énoncé du théorème 7 bis.

Remarque. En fait, nous avons démontré mieux que le théorème 8, savoir: Si v est une application de E dans l'espace localement convexe complet G donnée par la formule 3.42, où B est une partie bornée convexe cerclée et fermée de G, et si on désigne par G_1 l'espace de Banach $\mathbf{C}.B$, muni[7] de la norme définie par la "boule" B, alors v transforme le voisinage $(A')^\circ$ de l'origine dans E en une partie relativement faiblement compacte de G_1, et les parties faiblement compactes ou faiblement métrisables et bornées de E en parties relativement compactes de G_1. Cet énoncé est notablement plus fort que celui du théorème 8; il joue un rôle important dans la théorie des "espaces nucléaires" annoncée dans [**10**].

3.5 Deux autres applications du théorème 6.

PROPOSITION 13. *Soit M un espace localement compact muni d'une mesure μ, F un espace localement convexe séparé complet, Φ une application faiblement sommable de M dans F. Pour qu'on ait $\int \Phi f\, d\mu \in F$ pour toute $f \in L^\infty(\mu)$, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\int_A \Phi f\, d\mu \in F$$

pour toute partie fermée A de M.

Supposons pour simplifier que F est un espace de Banach (la démonstration est essentiellement la même dans le cas général). *A priori*, pour $f \in L^\infty(\mu)$, $\int \Phi f\, d\mu$ est un élément du bidual F'' de F, et l'application

$$f \to \int \Phi f\, d\mu = u(f)$$

est une application linéaire de L^∞ dans E'', continue pour les topologies faibles des duals par définition même de l'intégrale faible, donc fortement continue d'après le théorème du "graphe fermé". Mais la boule unité de $C_0(M)$ définit une partie faiblement dense de la boule de L^∞, donc pour montrer que $u(f) \in F$ pour toute $f \in L^\infty$, il suffit de montrer que l'ensemble des $\int \Phi f\, d\mu$, quand f parcourt le boule unité de $C_0(M)$, est partie faiblement relativement compacte de F. Comme u est fortement continue de L^∞ dans F'', il résulte facilement de l'hypothèse que u applique les éléments de L^∞ qui proviennent d'une $f \in C_0(M)$ *dans* F (car toute $f \in C_0(M)$ peut s'approcher uniformément par des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles compacts, comme on vérifie facilement). Par suite, $f \to \int \Phi f\, d\mu$ est une application linéaire continue v de $C_0(M)$ *dans* F, nous voulons montrer qu'elle est faiblement compacte.

[7] Il bien s'agit d'un espace *complet*, car on démontre facilement: Si A est une partie convexe cerclée et complète d'un espace localement convexe, alors l'espace $\mathbf{C}.A$, muni de la norme définie par la "boule" A, est *complet*.

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

D'après le théorème 6 (remarque 2) il suffit de montrer que pour toute partie fermée A de M, on a $v''(\phi_A) \in F$. Mais on vérifie trivialement que l'on a $v''(\phi_A) = u(\phi_A)$, donc par hypothèse $v''(\phi_A) \in F$, cqfd.

On fera attention qu'il n'est nullement suffisant que l'on ait $\int \Phi f\, d\mu \in F$ pour toute $f \in C_0(M)$ pour avoir la même relation pour toute $f \in L^\infty(\mu)$, même dans le cas où M est l'intervalle compact $(0,1)$ muni de la mesure de Lebèsgue, et où Φ est fortement mesurable.

Une dernière application du théorème 6 est relative à la notion de fonction vectorielle complètement additive d'ensemble borélien,[8] définie sur la tribu borélienne T attachée à un espace compact K, et à valeurs dans un espace localement convexe E. Quand E est le corps des scalaires il est bien connu (théorème de Riesz) que cette notion est identique à celle de mesure de Radon sur K, c'est à dire de forme linéaire continue sur l'espace $C(K)$. D'autre part, il est connu aussi que, E étant de nouveau quelconque, une fonction *faiblement* complètement additive sur T, à valeurs dans E, est déjà *fortement* complètement additive: c'est l'essentiel du théorème d'Orlicz: une famille (x_i) d'éléments de E telle que toute sous-famille soit faiblement sommable, est fortement sommable (le plus souvent, on l'énonce seulement quand E est une espace de Banach, mais la démonstration est générale—c'est par exemple un cas particulier du corollaire 2 de la proposition 3).

A partir du théorème de Riesz, il est immédiat de voir, par transposition, que la notion de fonction vectorielle complètement additive d'ensemble borélien, à valeurs dans E, est équivalente à la notion d'application linéaire u de E' dans le dual $\mathfrak{M}^1(K)$ de $C(K)$, telle que pour tout $A \in T$, la forme linéaire

$$x' \to \langle \phi_A, u(x') \rangle$$

sur E' provienne d'un élément de E (ϕ_A désignant la fonction caractéristique de A, identifiée à une forme linéaire sur $\mathfrak{M}^1(K)$), c'est à dire dont la transposée u' (qui *a priori* est une application linéaire du dual de $\mathfrak{M}^1(K)$ dans le dual *algébrique* de E') applique *dans* E le sous-espace β du dual de $\mathfrak{M}^1(K)$ engendré par les fonctions caractéristiques d'ensembles boréliens. Une telle application u transforme une partie convexe cerclée équicontinue et faiblement compacte A' de E' en une partie *bornée* de $\mathfrak{M}^1(K)$. Cela résulte du "théorème du graphe fermé" de Banach quand E est un espace de Banach, et on se ramène à ce cas dans le cas général, en considérant u comme une application linèaire de l'espace de Banach $\mathbf{C}.A'$ (muni de la "boule" A') dans $\mathfrak{M}^1(K)$. Soit alors E'^* l'espace des formes linéaires sur E' qui sont bornées sur les parties équicontinues de E', muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues (topologie qui induit sur E la topologie propre de E). De ce qui précède, il

[8]Pour abréger, nous appellerons, contrairement à l'usage courant, ensemble borélien toute partie de K dont la fonction caractéristique est une fonction de Baire, c'est à dire appartient à la plus petite famille de fonctions sur K contenant les fonctions continues, et stable pour les limites de suites qui convergent en chaque point. Cette terminologie coïncide avec la terminologie classique si K est métrisable.

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

résulte que u' est application linéaire *continue* du bidual de $C(K)$ dans E'^*. Si E est complet, u' applique dans E l'adhérence forte $\bar{\beta}$ de β dans le dual de $\mathfrak{M}^1(K)$, c'est à dire l'espace $\mathfrak{B}(K)$ des fonctions de Baire sur K. En particulier, la restriction de u' à $C(K)$ sera une application linéaire continue v de $C(K)$ dans E, et on vérifie aussitôt que u n'est autre que la transposée de v, dont la bitransposée v'' est donc égale à u' et applique $\mathfrak{B}(K)$ dans E. Réciproquement, la transposée $u = v'$ d'une telle application linéaire continue v de $C(K)$ dans E satisfait évidemment à la condition envisagée plus haut, savoir que u' applique β dans E. Ainsi, il résulte élémentairement du théorème de Riesz que *les fonctions complètement additives d'ensembles boréliens de K, à valeurs dans l'espace localement convexe séparé complet E, correspondent biunivoquement aux applications linéaires continues v de $C(K)$ dans E dont la bitransposée transforme les fonctions de Baire en éléments de E.* Compte tenu alors de la condition (2) du théorème 6, on obtient:

PROPOSITION 14. *Soit K un espace compact, E un espace localement convexe séparé complet. Alors les fonctions vectorielles d'ensembles boréliens, à valeurs dans E, complétement additives (faiblement ou fortement) correspondent biunivoquement aux applications linéaires faiblement compactes de $C(K)$ dans E.*

Bien entendu, on obtient la fonction d'ensemble définie par l'application linéaire v, en prenant la restriction de la bitransposée de v aux fonctions caractéristiques d'ensembles boréliens.

§4. Sur deux classes particulières d'espaces $C(K)$

4.1 K **est un espace compact "stonien".** Un espace compact est dit "stonien", si l'adhérence d'une partie ouverte est ouverte; il revient au même de dire que l'espace des fonctions réelles continues sur K est un lattice complet pour sa relation d'ordre naturelle. Les espaces stoniens interviennent actuellement dans de nombreuses questions. En particulier, si on identifie, comme nous l'avons déjà fait plusiers fois, un espace $L^\infty(\mu)$ à un espace $C(K)$, K sera un espace stonien (car la partie réelle de $L^\infty(\mu)$ est un lattice complet, comme il est bien connu). Signalons encore le résultat suivant, du à L. Nachbin **[12]**: Si K est un espace compact stonien, et si $C(K)$ est un sous-espace vectoriel normé d'un espace de Banach E, alors il existe une projection de E sur $C(K)$ de norme égale à 1.

Les espaces stoniens les plus simples sont les compactifiés de Čech-Stone $\hat{I}$ d'espaces discrets arbitraires I. $C(\hat{I})$ s'identifie alors à l'espace $C^\infty(I)$ de toutes les fonctions complexes et bornées sur I, et (par l'intermédiaire de leurs fonctions caractéristiques) les parties arbitraires de I correspondent biunivoquement aux parties à la fois ouvertes et fermées de $\hat{I}$, avec conservation de la relation d'inclusion. Il est facile de plus de vérifier le fait bien connu que les formes linéaires continues sur $C^\infty(I) = C(\hat{I})$, c'est à dire les mesures de Radon sur $\hat{I}$, correspondent biunivoquement aux fonctions complexes additives définies sur l'ensemble de *toutes* les parties de I.

Tout ceci posé, nous pouvons démontrer le

THÉORÈME 9. *Soit K un espace compact Stonien. Alors toute suite (μ_i) de mesures de Radon sur K, vaguement convergente vers zéro, converge vers zéro pour la topologie faible de l'espace de Banach $\mathfrak{M}^1(K)$.*

Démonstration. $C(K)$ peut s'identifier à un sous-espace vectoriel normé de l'espace E de *toutes* les fonctions bornées définies sur K, et de plus c'est un facteur direct de cet espace d'après le théorème de Nachbin rappelé plus haut. Donc la suite des formes linéaires μ_i sur $C(K)$ peut se prolonger en une suite de formes linéaires continues ν_i sur E, telle que

$$\lim_i \nu_i(f) = 0$$

pour toute $f \in E$. Il suffit maintenant de montrer que (ν_i) converge vers zéro pour $\sigma(E', E'')$, ce qui nous ramène au cas où l'espace compact envisagé est le compactifié de Čech-Stone $\hat{I}$ d'un espace discret I.—Tout revient manifestement à montrer que la suite (μ_i) est partie faiblement relativement compacte de l'espace de Banach $\mathfrak{M}^1(\hat{I})$. Nous appliquons pour cela le critère (3) du théorème 2, en notant qu'ici ce critère signifie manifestement qu'on ne peut trouver un $\epsilon > 0$, une suite partielle (ν_i) de (μ_i), et une suite (O_i) d'ouverts deux à deux disjoints, tels qu'on ait $|\nu_i(O_i)| > \epsilon$ pour tout i. D'ailleurs, comme l'espace $\hat{I}$ est totalement discontinu, on pourrait alors pour tout i trouver une partie O'_i de O_i *à la fois ouverte et fermée*, telle que l'on ait encore $|\nu_i(O'_i)| > \epsilon$, de sorte qu'on pourrait déjà supposer les O_i à la fois ouverts et fermés. Interprètons maintenant les ν_i comme fonctions additives dans l'ensemble de toutes les parties de I, et identifions les O_i à des parties deux à deux disjointes A_i de I, on aurait donc $|\nu_i(A_i)| > \epsilon$ pour tout i, montrons que cela est impossible. En effet, soit N l'ensemble des entiers naturels, et pour tout i soit $\tilde{\nu}_i$ la fonction additive d'ensembles, définie sur l'ensemble de toutes les parties B de N par la formule

$$\tilde{\nu}_i(B) = \nu_i(\bigcup_{j \in B} A_j).$$

Les normes des ν_i, considérés comme formes linéaires sur $C^\infty(N)$, restent bornées, et on a

$$\lim_i \tilde{\nu}_i(B) = 0$$

pour tout $B \subset N$. Il en résulte, d'après un lemme du à R. Philipps [**13**], que l'on a

$$\lim_i \sum_j |\tilde{\nu}_i(j)| = 0,$$

a fortiori $\lim \tilde{\nu}_i(i) = 0$, i.e., $\lim \nu_i(A_i) = 0$, ce qui prouve le théorème.

COROLLAIRE 1. *Si K est un espace compact stonien, F un espace localement convexe séparé complet séparable* (i.e. admettant une suite partout dense), *alors toute application linéaire continue de $C(K)$ dans F est faiblement compacte.*

En effet, cela est inclus dans le

LEMME 8. *Si E est un espace de Banach, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Toute suite (x'_i) du dual E', faiblement convergente vers zéro, converge vers zéro pour $\sigma(E', E'')$.*

(2) *Toute application linéaire continue u de E dans un espace localement convexe séparé complet séparable F, est faiblement compacte.*

(1) $\rightarrow$ (2), car il suffit de montrer (lemme 1) que la transposée u' transforme parties équicontinues de F' en parties de E' qui sont relativement $\sigma(E', E'')$-compactes. Mais les parties équicontinues faiblement fermées de F' sont faiblement compactes et *métrisables*, donc leurs images dans E' ont la même propriété. Or, une partie A' bornée et faiblement métrisable dans E' est effectivement relativement $\sigma(E', E'')$-compacte moyennant (1). Car en vertu du théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que de toute suite extraite de A' on peut extraire une suite qui converge pour $\sigma(E', E'')$, or on peut en effet en extraire une suite qui soit *faiblement* convergente, done aussi $\sigma(E',E'')$-convergente par hypothèse.

(2) $\rightarrow$ (1), car soit (x'_i) une suite dans E' qui converge vers zéro faiblement, il suffit de montrer qu'elle est relativement compacte pour $\sigma(E', E'')$. Mais considérons l'application linéaire u de E dans l'espace c_0 des suites de nombre complexes qui tendent vers zéro, définie par $u(x) = (\langle x, x'_i\rangle)$. Sa transposée transforme la boule unité du dual l^1 de c_0 en une partie de E' contenant les x'_i. D'après l'hypothèse (2), et comme c_0 est séparable, u est application faiblement compacte, donc (lemme 1) la suite des x'_i est bien relativement $\sigma(E', E'')$-compacte.

COROLLAIRE 2. *Tout espace quotient séparable de $C(K)$ (K, espace compact stonien) est réflexif. Un espace séparable de dimension infinie ne peut être facteur direct de $C(K)$.*

La première partie du corollaire résulte aussitôt du corollaire 1. La deuxième partie résulte de la première, compte tenu du fait qu'un espace réflexif de dimension infinie ne peut être facteur direct d'un espace $C(K)$ (corollaire de la proposition 5).

Le corollaire 2 précise de beaucoup le résultat bien connu que l'espace c_0 des suites de nombres complexes qui tendent vers zéro n'est pas facteur direct dans son bidual, espace de toutes les suites bornées. Plus généralement, si K est un espace compact métrisable infini, $C(K)$ n'est pas facteur direct dans son bidual, car $C(K)$ est séparable, et son bidual s'identifie à l'espace des fonctions continues sur un espace compact stonien (car le bidual s'identifie à un espace $L^\infty(\mu)$, comme dual de l'espace $\mathfrak{M}^1(K)$ qui s'identifie à un espace $L^1(\mu)$). Plus généralement encore, on a le

COROLLAIRE 3. *Soit K un espace compact quelconque, E un espace quotient de $C(K)$. Alors l'espace de Banach E'', bidual de E, satisfait aux conditions du* *lemme* 8. *En particulier, E'' ne peut être séparable que si E'', donc E, est réflexif. Et si E est séparable, E ne peut être facteur direct dans son bidual que si E est réflexif.*

En effet, E'' est alors isomorphe à un espace quotient du bidual de $C(K)$, or ce dernier s'identifie à l'espace des fonctions continues sur un certain espace stonien, et satisfait par suite aux conditions du lemme 8.

Remarquons que le corollaire 3 nous donne d'autres propriétés spéciales aux espaces quotients d'espaces du type $C(K)$, s'ajoutant à celles obtenues aux §§ 2 et 3.

Du corollaire 3, on déduit aussi qu'un espace de Banach non réflexif qui est séparable, et isomorphe à un dual fort d'espace de Banach, ne peut être isomorphe à un quotient d'espace $C(K)$. On sait en effet qu'un dual E d'espace de Banach est facteur direct dans son bidual.

4.2 Sous-espace et espaces quotients de c_0. Soit c_0 l'espace des suites de nombres complexes qui tendent vers zéro, muni de la norme uniforme. Nous allons montrer que les sous-espaces et espaces quotients de c_0 ont, entre autres, toutes les propriétés envisagées aux §§ 1, 2, 3, pour les espaces $C(K)$.

Notons d'abord que le dual de c_0, qui s'identifie à l'espace l^1 des suites sommables, est séparable, donc il en est de même du dual d'un sous-espace ou d'un espace quotient de c_0. D'autres part, on a la facile

PROPOSITION 15. *Soit E un espace localement convexe complet dont les parties bornées sont faiblement métrisables* (cela signifie, si E est un espace de Banach, que son dual fort est séparable). *Alors:*

(1) *E jouit de la propriété D* (définition 4);

(2) *E jouit de la propriété* R. D.-P. (définition 3) *et même de la propriété plus forte: toute application linéaire u de E dans un espace localement convexe séparé complet qui transforme suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes, transforme parties bornées en parties fortement relativement compactes.*

(3) *E peut ne pas jouir de la propriété* D.-P. (définition 1). *Mais s'il satisfait à cette propriété, alors toute application linéaire continue de E dans un espace localement convexe F qui transforme parties bornées de E en parties relativement faiblement compactes de F, transforme même parties bornées de E en parties fortement relativement compactes de F; et toute partie équicontinue de E' qui est relativement compacte pour $\sigma(E', E'')$ est relativement compacte pour la topologie forte.*

Démonstration. (1) a déjà été remarqué au §3, exemple (c).

(2) Il suffit de montrer que sous les conditions de l'énoncé (2), la restriction de u à une partie bornée convexe cerclée A de E est continue pour la topologie faible sur A et la topologie forte sur F. Car u sera alors même uniformément continue de A faible dans F fort (cela résulte par exemple du résultat intermédiaire—en italiques—de la démonstration du lemme 3), et comme A est faiblement précompact, son image sera bien fortement précompacte. — Comme A faible est métrisable, il suffit de vérifier que u est continue sur A faible pour les suites,

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

or par hypothèse u transforme suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes.

(3) Un espace réflexif séparable de dimension infinie satisfait aux conditions générales de la proposition 15, sans jouir de la propriété D.-P. Mais supposons que E jouisse de la propriété D.-P., montrons qu'alors toute application linéaire continue u de E dans un espace localement convexe F qui transforme parties bornées en parties relativement faiblement compactes, les transforme même en parties fortement relativement compactes. Cela résulte en effet de (2), car l'hypothèse D.-P. implique que u transforme suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes. Enfin, il en résulte aussi qu'une partie équicontinue A' de E' qui est relativement $\sigma(E', E'')$-compacte, est relativement fortement compacte. C'est en effet un cas particulier de la proposition 1, où $\mathfrak{S}$ désigne l'ensemble des parties bornées de E (en tenant compte de la remarque (b) qui suit cette proposition).

THÉORÈME 10. *Soit E une espace de Banach que est isomorphe à un sous-espace ou à un espace quotient de c_0. Alors E jouit des propriétés* D.-P., R.D.-P. *et D, toute partie de E' qui est relativement $\sigma(E', E'')$-compacte est relativement fortement compacte, et toute suite dans E' qui est suite de Cauchy pour $\sigma(E', E'')$ est fortement convergente.*

De toutes façons, les propriétés D et R. D.-P. résultent de la proposition 15. La propriété D.-P. est facile à vérifier quand E est un espace quotient de c_0, car son dual sera isomorphe à un sous-espace vectoriel de l^1, donc toute partie de E' qui est $\sigma(E', E'')$-compacte est fortement compacte, puisqu'on sait que toute partie de l^1 qui est faiblement compacte (pour la topologie faible définie par le dual l^∞ de l^1) est fortement compacte. Le fait qu'une suite de Cauchy pour $\sigma(E', E'')$ converge fortement se voit alors de la même façon. Reste, dans le cas où E est un sous-espace de c_0, à montrer que E jouit de la propriété D.-P., et que toute suite de Cauchy pour $\sigma(E', E'')$ converge fortement. Pour la première propriété, il suffit de démontrer directement que pour toute suite (x_i) dans E qui tend vers zéro faiblement, et toute suite (x'_i) dans E' qui tend vers zéro pour $\sigma(E', E'')$, on a

$$\lim_i \langle x_i, x'_i \rangle = 0$$

(voir fin du No. 2 du §1). Et de même, pour la seconde propriété, il suffit de montrer que pour toute suite (x_i) dans E faiblement convergente vers zéro, et toute suite de Cauchy (x'_i) pour $\sigma(E', E'')$, on a $\lim \langle x_i, x'_j \rangle = 0$ uniformément en j (car alors l'application $x \to u(x) = (\langle x, x'_j \rangle)$ de E dans l'espace c des suites de nombres complexes qui tendent vers une limite transforme suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes, donc est compacte (proposition 15) donc (lemme 2) l'image de la boule unité du dual de c par la transposée u' est compacte). Cela équivaut aussi manifestement à dire que pour toute suite de Cauchy (x'_i) pour $\sigma(E', E'')$, et toute suite (x_i) dans E faiblement convergente

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

vers zéro, on a lim $\langle x_i, x'_i \rangle = 0$, condition qui inclut aussi la première des deux propriétés que nous avions en vue.

Tout revient donc à montrer qu'on ne peut avoir $|\langle x_i, x'_i \rangle| > \epsilon > 0$ pour tout i, quand (x_i) est une suite faiblement convergente vers zéro dans E, et (x'_i) une suite de Cauchy pour $\sigma(E', E'')$ dans E'. Mais cela résulte aisément du fait que cette propriété est vraie quand E est identique à c_0, et du

LEMME 9. *Soit (x_i) une suite dans c_0 qui converge faiblement vers zéro sans converger fortement. Alors il existe une suite (y_i) extraite, telle que le sous-espace vectoriel fermé de c_0 engendré par les y_i soit isomorphe à c_0.*

Ce lemme précise un résultat de Banach [**1**, p. 194], et se démontre de la même façon. On peut se ramener immédiatement au cas où $||x_i|| = 1$ pour tout i (en extrayant sinon une suite partielle (y_i) telle que

$$\lim_i ||y_i||$$

existe et soit non nulle, et en remplaçant alors les y_i par les $z_i = y_i/||y_i||$). On peut alors par récurrence construire une suite (y_i) extraite de (x_i), et une suite strictement croissante (N_i) d'entiers naturels, telles qu'on ait

$$|y_i(j)| \leqslant (\tfrac{1}{4})^i \text{ pour } j \leqslant N_{i-1} \text{ ou } j \geqslant N_i \quad (N_0 = 0). \tag{1}$$

La possibilité de la récurrence est évidente: on prend d'abord y_1 arbitrairement, puis N_1 tel que $j \geqslant N_1$ implique $|y_1(j)| \leqslant \frac{1}{4}$. Supposant alors la construction faite jusqu'au rang n (les relations (1) et (2) étant supposées satisfaites pour les indices i, j, i' qui sont $\leqslant n$), on continue en choisissant y_{n+1} tel que l'on ait $|y_{n+1}(j)| \leqslant (\frac{1}{4})^{n+1}$ pour $j \leqslant N_n$, puis N_{n+1} tel que l'on ait $|y_{n+1}(j)| \leqslant (\frac{1}{4})^{n+1}$ pour $j \leqslant N_{n+1}$.

Soit ϕ le sous-espace de c_0 formé des éléments dont un nombre fini seulement de cordonnées sont non nulles, muni de la norme induite par c_0, et pour $\lambda = (\lambda_i) \in \phi$, posons

$$u(\lambda) = \sum \lambda_i y_i.$$

On a ainsi une application linéaire de ϕ dans c_0, il suffit de montrer que c'est un isomorphisme dans, car alors l'isomorphisme $\tilde{u}$ de c_0 dans c_0 qui prolonge u aura évidemment pour image le sous-espace vectoriel fermé de c_0 engendré par les y_i. Or je dis qu'on a en effet, pour $\lambda \in \phi$:

$$\tfrac{2}{3}||\lambda|| \leqslant ||u(\lambda)|| \leqslant \tfrac{4}{3}||\lambda||.$$

L'inégalité de droite équivaut à: $|u(\lambda).(j)| \leqslant \frac{4}{3}$ pout tout j, quand $||\lambda|| \leqslant 1$. Or pour j donné, il existe un indice i tel que $N_{i-1} \leqslant j \leqslant N_i$, on aura alors

$$u(\lambda) \,.\, (j) = \sum_{i'(i' \neq i)} \lambda_{i'} y_{i'}(j) + \lambda_i y_i(j) \,,$$

d'où, en vertu de (1), et puisque $||\lambda|| \leqslant 1$, $||y_i|| = 1$, $||y_{i'}|| = 1$:

$$|u(\lambda) \,.\, (j)| \leqslant \sum_{i'} (\tfrac{1}{4})^{i'} + 1 = \tfrac{4}{3}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4 Published online by Cambridge University Press

Pour démontrer l'inégalité de gauche, on note que pour λ donné, existe un indice α tel que $|\lambda_\alpha| = ||\lambda||$, puis un indice j tel que $|y_\alpha(j)| = ||y_\alpha|| = 1$. En vertu de (1), on a forcément $N_{\alpha-1} < j < N_\alpha$. On a alors

$$||u(\lambda)|| \geqslant |u(\lambda)\,.\,(j)| = |\sum_{i\neq\alpha} \lambda_i y_i(j) + \lambda_\alpha y_\alpha(j)| \geqslant |\lambda_\alpha y_\alpha(j)| - |\sum_{i\neq\alpha} \lambda_i y_i(j)|$$

d'où, compte tenu de (1) et de $|\lambda_\alpha| = ||\lambda||$, $|y_\alpha(j)| = 1$:

$$||u(\lambda)|| \geqslant ||\lambda|| - ||\lambda|| \sum (\tfrac{1}{4})^i = \tfrac{2}{3}||\lambda||, \qquad \text{cqfd.}$$

Corollaire du théorème 10. *Soit E un espace de Banach isomorphe à un sous-espace vectoriel ou un espace quotient de c_0. Toute application linéaire faiblement compacte de E dans un espace localement convexe F est compacte. Si F est un espace quotient d'un espace $C(K)$, ou plus généralement, si F est un espace de Banach qui jouit de la propriété D, ou* R. D.-P., *alors tout forme bilinéaire continue sur $E \times F$ est compacte* (définition 5).

La première partie du corollaire résulte de la proposition 15, la deuxième s'obtient en identifiant la forme bilinéaire à une application linéaire de F dans le dual fort G de E, et en utilisant les propriétés de G énoncées dans le théorème 10.

Bibliographie

1. S. Banach, *Théorie des opérations linéaire* (Varsovie, 1932).
2. N. Bourbaki, *Algèbre* (Actualitiés sci. et industr., Paris, 1948), Chap. 3.
3. J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* $(\mathfrak{F})$ *et* $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$, Annales de Grenoble, *1* (1949), 61–101.
4 J. Dieudonné, *Sur les espaces de Köthe*, Journal d'Analyse Mathématique, *1* (Jérusalem, 1951), 81–115.
5. ———, *Sur la convergence des suites de mesures de Radon*, Anais da Acad. Bras. Ciencias, *23* (1951), 21–38.
6. N. Dunford, *Uniformity in linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., *44* (1938), 305–356; in particular, Theorems 60, 75.
7. N. Dunford et J. Pettis, *Linear transformations on summable fonctions*, Trans. Amer. Math. Soc., *47* (1940), 323–392.
8. A. Grothendieck, *Critères dénombrables de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. Math., *74* (1952), 168–186.
9. ———, *Critères généraux de compacité dans les espaces localement convexes généraux*, C. R. Acad. Sci., Paris, *231* (1950), p. 217–240.
10. ———, *Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques*, C. R. Acad. Sci., Paris, *233* (1951), 1556–1558.
11. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces*, Ann. Math., *42* (1941), 523–537.
12. L. Nachbin, *A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., *68* (1950), 28–46.
13. R. Philipps, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., *48* (1940), 525.
14. M. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., *41* (1937), 375–481.

Université de Nancy